

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
ОБНИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ АТОМНОЙ ЭНЕРГЕТИКИ (ИАТЭ)**

**Факультет естественных наук**

**К.Н. ВИШЕРАТИН, Ф.И. КАРМАНОВ**

**ПРАКТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОЦЕНИВАНИЯ  
СПЕКТРАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ**

**Учебное пособие по курсу  
«Вычислительные методы в инженерных расчетах»**

*Рекомендовано к изданию  
Редакционно-издательским советом университета*

**Обнинск 2008**

УДК 537(075)

Вишератин К.Н., Карманов Ф.И. Практические методы оценивания спектральных параметров. Учебное пособие по курсу «Вычислительные методы в инженерных расчетах». – Обнинск: ИАТЭ, 2008. – 60 с.

Учебное пособие предназначено для студентов, изучающих методы математической статистики. Оно содержит описание алгоритмов основных методов цифрового спектрального анализа – фурье- и вейвлет-преобразований, метода максимальной энтропии. Практические примеры алгоритмов даны для специализированного пакета МАТЛАБ.

Рецензенты: к.ф.-м.н. М.В. Макарова,  
к.ф.-м.н. С.В. Ермаков

Темплан 2008, поз. 14

© Обнинский государственный технический университет атомной энергетики, 2008 г.

© К.Н. Вишератин, Ф.И. Карманов, 2008 г.

## ВВЕДЕНИЕ

Цель пособия – ознакомить студентов с некоторыми современными спектральными методами исследования временных рядов, описывающих различные физические процессы.

В настоящее время возможности персональных компьютеров позволяют перейти от упрощенных методов спектрального анализа, например, алгоритмов типа Fast Fourier Transform – быстрого преобразования фурье (БПФ) к классическим методам или к их модификациям, требующим больших вычислительных ресурсов, но и обладающим лучшими характеристиками. Широкое распространение получил вейвлетный анализ и его модификации, имеющие иногда другие названия (S-Transform). В то же время в прикладных пакетах статистических и математических программ в качестве основного (и иногда единственного) спектрального метода предлагается БПФ, а алгоритмы практического использования других методов спектрального оценивания только обозначены.

По мнению авторов, слабым местом многих научных публикаций и пакетов программ традиционно остается вопрос оценки значимости параметров гармоник, выявляемых в спектральном анализе. Можно встретить примеры, когда одни и те же временные ряды, в зависимости от используемых авторами методов, показывают отличающуюся спектральную структуру и различную степень значимости входящих в эту структуру спектральных мод. Отметим также, что преимущественное издание литературы по анализу данных, рассчитанной на теоретиков, не способствует внедрению современных методов спектрального анализа в практику исследовательских работ. Достаточно точно выразился по этому поводу В. Фигурнов в предисловии к книге Ю.Н. Тюрина и А.А. Макарова «Анализ данных на компьютере»: «Таким образом, российские специалисты и менеджеры, исследователи и студенты, желающие применять методы анализа данных, находятся в гораздо более затруднительном положении по сравнению со своими западными коллегами. Им приходится изучать многие аспекты прикладной статистики самостоятельно, при этом по книгам, рассчитанным не на прикладных специалистов, а на профессиональных математиков (просто потому, что, в основном, именно такие книги имеются в наличии)».

Поэтому в настоящей работе рассмотрены только практические примеры использования основных современных методов спектрального анализа и методов оценки значимости. Теоретические формулы даются в минимальном, необходимом для понимания алгоритмов программ, количестве. Примеры программ, которые могут служить основой для последующей доработки и усложнения, протестированы в пакете Матлаб. В отличие от универсальных языков программирования типа СИ система Матлаб использует работающий в режиме интерпретации чрезвычайно емкий и лаконичный матрично-ориентированный язык программирования, специально созданный для решения инженерных и научных задач. На взгляд авторов, одним из лучших является также качество визуализации результатов вычислений, возможности интерактивной работы с графикой и ее экспорта в другие форматы.

В пособии рассмотрены методы вычисления амплитудных спектров с помощью трех модификаций фурье-преобразования, а также вейвлетного преобразования и метода максимальной энтропии Берга. Кратко описаны преимущества и недостатки этих методов. Отдельно рассматриваются методы оценивания значимости находимых при спектральном анализе параметров. Сопоставляются оценки значимости параметров гармоник методами Брукса-Карузерса, Монте-Карло и другими. Авторы старались также по мере возможности показать практические методы представления результатов спектрального анализа в виде двух- и трехмерных графиков.

Авторы благодарны В. Яхрюшину, прочитавшему рукопись статьи и сделавшему ряд полезных замечаний. Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проекты 06-05-64157 и 07-08-96434.

## **1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ**

Приведенный ниже краткий обзор составлен на основе сведений, содержащихся в многочисленных книгах и руководствах по статистике и цифровому спектральному анализу. Более подробное изложение ряда методов спектрального анализа можно найти, например, в [1–4].

## 1.1. Фурье-преобразование

Всякая ограниченная кусочно-непрерывная функция  $\varphi(t)$ , имеющая на протяжении периода конечное число максимумов, может быть представлена в виде ряда Фурье. Если  $\varphi(t)$  – вещественная функция, то ее можно выразить через вещественные базовые функции  $\cos(2\pi k f_1 t)$  и  $\sin(2\pi k f_1 t)$ , т.е. в виде суммы косинусоид, изменяющихся с частотой  $k f_1$ , имеющих амплитуду  $2|C_k|$  и начальную фазу  $\theta_k$ :

$$\varphi(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|C_k| \cos(2\pi k f_1 t + \theta_k) \quad (1.1)$$

или в виде

$$\varphi(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(2\pi k f_1 t) + b_k \sin(2\pi k f_1 t)] \quad (1.2)$$

где  $f_1 = 1/T_1$  – основная круговая частота,  $T_1$  – период функции  $\varphi(t)$ ,  $k$  – целое число,  $C_k$  – постоянные коэффициенты,  $C_0 = a_0/2$  – среднее значение ряда. Гармонические коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$  соотносятся с коэффициентами  $C_k$  следующим образом:

$$a_k = 2|C_k| \cos \theta_k; \quad b_k = 2|C_k| \sin \theta_k; \quad C_k = (a_k^2 + b_k^2)^{1/2}. \quad (1.3)$$

Угол  $\theta_k$  равен отношению мнимой и вещественной частей коэффициента  $C_k$ :  $\theta_k = \arctg(-b_k/a_k)$ . На практике ряды имеют ограниченную длину, и суммирование ведется на участке от  $t_0$  до  $t_0 + T_1$ , содержащем  $N$  отсчетов ( $k = 1 \dots N$ ) величины  $\varphi(t)$ .

Поскольку непериодический сигнал можно представить как частный случай периодического, но имеющего период, стремящийся к бесконечности, то частота отдельной гармоники  $k f_1$  в этом случае будет играть роль текущей частоты  $f$ , и ее можно представить как дифференциал  $df$ , а сумма гармоник перейдет в интеграл по этой частоте. В результате можно определить интегральные формы прямого (1.4) и обратного (1.5) преобразований Фурье для комплексной функции  $\varphi(t)$ :

$$\Phi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-j2\pi f t} dt, \quad (1.4)$$

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(f) e^{j2\pi f t} df. \quad (1.5)$$

Пусть в уравнении (1.4)  $t$  – время,  $f$  – частота ( $\omega = 2\pi f$ ,  $f = 1 / T$ ). В этом случае  $\varphi(t)$  обозначает сигнал во временной области, а  $\Phi(f)$  – в частотной. Фурье-преобразование предоставляет средства для преобразования сигнала, определенного во временной области, в частотную. Сигнал  $\varphi(t)$  умножается на комплексное выражение, которое имеет синусы и косинусы частоты  $f$ , и затем это произведение интегрируется. Если результат этого интегрирования имеет большое значение, то сигнал  $\varphi(t)$  имеет доминирующую спектральную компоненту на частоте  $f$ . Если результат интегрирования нулевой, то сигнал не содержит компоненту с частотой  $f$ .

Интегрирование на практике ведется в ограниченной области (от  $t_0$  до  $t_0 + T_1$ ) и для дискретизированных функций. Дискретное преобразование Фурье является вариантом ПФ, в котором обрабатываются дискретизированные значения сигнала и вместо интегрирования функций проводится суммирование их дискретных значений. Если выбирать период дискретизации меньшим, чем полупериод наивысшей спектральной гармоники, то спектр дискретизированного сигнала приближенно равен спектру непрерывного сигнала.

### ***О терминологии преобразования Фурье***

В литературе часто можно встретить выражения типа «спектр мощности», «энергетический спектр», «спектральная плотность мощности», «спектр амплитуд» и т.д. и иногда бывает трудно определить, какие именно величины, полученные при проведении ПФ, используются авторами. То, что терминология ПФ окончательно не установилась, связано со спецификой использования ПФ в различных приложениях – в радиофизике, математике, астрономии, информатике, оптике и т.д.

Спектр сигнала – это зависимость интенсивности входящих в состав сигнала гармоник от частоты этих гармоник. Преобразование Фурье периодического сигнала – это дискретный спектр, в то время как преобразование непериодического сигнала (например, одиночного импульса) – непрерывный спектр. Дискретный спектр имеет ту же размерность, что и сигнал, а размерность непрерывного спектра равна отношению размерности сигнала к размерности частоты. Для непрерывного спектра часто употребляют термин

«спектральная плотность». Чтобы избежать трудностей при описании спектров произвольных сигналов, полагают размерность периодических сигналов такой же, как и для непериодических, поскольку формально непрерывный спектр периодического сигнала  $\Phi_C(f)$  с периодом  $T_1$  можно представить как набор дельта – импульсов, расположенных на частотной оси в точках  $f = k f_1 = k / T_1$  и имеющих площади, равные коэффициентам  $C_k$  ряда Фурье.

Вычислив для дискретных частот  $f$  коэффициенты  $a(f)$  и  $b(f)$  (1.3), можно (с точностью до нормировочных множителей) получить следующие выражения:

$$\begin{aligned} P(f) &= a(f)^2 + b(f)^2, \\ |A(f)| &= \sqrt{P(f)}, \\ \theta(f) &= \text{arctg}^{-1} \left( -\frac{b(f)}{a(f)} \right). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Если сигнал рассматривается на отрезке времени длиной  $T$ , то отношение  $P(f)$  к периоду  $T$  будет характеризовать спектральную плотность средней мощности сигнала, а соответствующий график будем называть **спектром мощности или периодограммой**. При сопоставлении временного ряда и его спектра иногда более удобно рассматривать **амплитудный спектр** или зависимость от частоты величины  $|A(f)|$ , имеющей размерность амплитуды сигнала в первой степени. Величина  $\theta(f)$  обычно носит название **спектр фаз**, или **фаза**.

### **Источники погрешностей ПФ**

При вычислениях Фурье-преобразования некоторого временного процесса возможны несколько эффектов, которые накладывают некоторые ограничения на этот метод. Эти эффекты связаны как с подготовкой исходных данных, так и с методологией проведения ПФ.

«Элясинг» (*aliasing*) или **эффект подмены частот**. Этот эффект возникает при недостаточной частоте выборки (дискретизации) изучаемых процессов в случае, если в анализируемом процессе есть достаточно мощные гармоники с частотой, превышающей частоту дискретизации. Единственным решением проблемы элясинга является увеличение скорости дискретизации исходного непрерывного сигнала и (в некоторых случаях – использование специальных фильтров).

«Ликедж» (*leakage*) или эффект просачивания частот. Эта проблема возникает из-за ограниченного интервала наблюдений за сигналом. Ограничение сигнала эквивалентно умножению сигнала на некоторую функцию окна. Это ведет к искажению спектра и просачиванию спектральной мощности реальной гармоники в другие спектральные интервалы. Несколько уменьшить влияние этого эффекта можно при увеличении интервала наблюдений или за счет «падинга» (*padding*) – удлинения длины ряда при его дополнении нулями, или «таперинга» (*tapering*) – предварительного сглаживания краев ряда подходящей функцией окна. Ликедж не всегда может быть отделен от элясинга, т.к. ликедж ведет к расширению спектра, и верхние частоты могут оказаться ниже частоты Найквиста (половина частоты выборки).

«Пикетфенс» (*picket-fence*) или эффект бойницы. Мы можем наблюдать точное поведение спектра только на дискретных частотах, вычисленных с помощью ПФ, что схоже с наблюдением через узкие бойницы. При этом некоторые спектральные компоненты могут оказаться между результатами вычислений.

Эффект Гиббса или эффект возникновения паразитных осцилляций, наиболее заметных вблизи мощных гармоник. Эффект Гиббса проявляется в случаях, когда анализируемая функция терпит разрыв, а также из-за конечного интервала наблюдений. Влияние конечности ряда, приводящее к свертке исследуемых сигналов с прямоугольной функцией, равной длине ряда, иногда удается минимизировать путем таперинга, т.е. сглаживания концов ряда (подробнее см. [2, 4]).

## **1.2. Вейвлетное преобразование**

Вейвлетное преобразование (ВП) является мощным инструментом для обнаружения во временных рядах иррегулярностей различного вида, анализа изменений во времени амплитуд и частот периодических компонентов. Термин «вейвлет-анализ» по смыслу аналогичен термину «фурье-анализ». В обоих случаях речь идет о представлении исследуемого процесса в виде линейной комбинации различных функций, именуемых базисом соответствующего преобразования. Для вейвлет – анализа характерны понятия масштаб (scale), сдвиг (translation), а графическое представление в виде



диаграммы специального вида часто именуется вейвлетограмма или скейлограмма. Вейвлетный анализ иногда называют «микроскопом», поскольку он позволяет исследовать каждый масштаб изучаемого процесса с необходимой разрешающей способностью, подобно тому, как в случае топографических карт выбор соответствующего масштаба позволяет рассмотреть интересные характеристики местности.

Вейвлетный анализ базируется на вейвлетах – волновых импульсах с ограниченной длительностью и нулевым средним значением. В буквальном переводе с английского языка слово *wavelet* означает «маленькая волна». Малость означает, что эта функция имеет конечную длину, а волна – что эта функция колебательная. Если фурье-анализ – это разложение сигнала на синусоидальные волны с различными частотами, то вейвлетный анализ – это разложение на версии оригинального вейвлета, называемого материнским. Термин «материнский» означает, что вейвлетные функции с различной областью существования, которые используются в процессе преобразования, получены из одной основной функции или материнского вейвлета. Версии вейвлета образуются за счет его масштабирования (по длительности) и сдвига (по временной шкале). Большие масштабы соответствуют наиболее «растянутым» или низкочастотным вейвлетам.

### ***Непрерывное вейвлет-преобразование***

Непрерывное вейвлет-преобразование свое название получило вследствие возможности (при выборе соответствующих вейвлетов) работать на любых (а не дискретно заданных) масштабах и возможности гладкого (квазинепрерывного) сдвига вейвлета вдоль временной оси. При ВП одномерного сигнала  $x(t)$  вычисляется двумерная матрица коэффициентов (амплитуд) вейвлетного преобразования  $C(\tau, s)$ , зависящих от масштаба и положения на временной оси:

$$C(\tau, s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi_{\tau, s}^*(t) dt, \quad (1.7)$$

где  $s$  – масштаб,  $\tau$  – сдвиг,  $\psi(t)$  – материнский вейвлет (\* обозначает комплексно сопряженное число). Связь материнского вейвлета с масштабом и сдвигом дается выражением

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \left( \frac{t - \tau}{s} \right). \quad (1.8)$$

Термин «сдвиг» связан с локализацией вейвлета, поскольку он перемещается вдоль анализируемого ряда. Параметр масштаба обратно пропорционален частоте. Самые низкие частоты (большие масштабы) соответствуют глобальной информации о сигнале и перекрывают полный сигнал, а высокие частоты (малые масштабы) соответствуют детальной информации, скрытой в кратковременных пульсациях сигнала, обычно проявляющихся время от времени как пики или выбросы.

В начале вычислений вейвлет помещается в начале сигнала в точке, которая соответствует  $t = 0$ , умножается на сигнал и затем интегрируется. Затем вейвлет смещается на выбранный интервал сдвига  $\tau$ , и вычисляется значение в момент  $t = \tau$ ,  $s = 1$ . Когда вейвлет достигает конца сигнала,  $s$  увеличивается на шаг, выбранный в плоскости шкалы времени. Таким образом, вычисления при одном масштабе создают строки в плоскости шкалы времени, а вычисления в различных масштабах – столбцы в плоскости шкалы времени. Если сигнал в момент времени  $\tau$  имеет заметный спектральный компонент, который соответствует текущей величине  $s$ , то на пересечении данного столбца и строки мы получим относительно большое значение коэффициента  $C(\tau, s)$ . Если спектральный компонент, который соответствует текущей величине  $s$ , в сигнале отсутствует, результатом будет относительно малая величина или ноль.

### ***Вейвлет Морле***

Имеется множество функций, которые используются в качестве материнских вейвлетов. Один из наиболее часто используемых – функция Морле (Morlet wavelet). Функция Морле является комплексной и представляет собой плоскую (комплексную) волну, модулированную функцией Гаусса

$$\psi(t) = e^{i\beta t} e^{-\frac{t^2}{2\sigma}},$$

где  $\beta$  – параметр модуляции,  $\sigma$  – параметр шкалы.

Параметр  $\beta$  определяет количество колебаний вейвлета и, соответственно, разрешение в частотной и временной областях. Пред-

почтительность выбора функции Морле основана на его локализованности как в частотном, так и во временном пространствах и возможности определения вейвлетов дробных масштабов.

При использовании в вейвлетном анализе комплексных вейвлетов, в частности вейвлета Морле, на скейлограмме обычно отображаются результаты вычисления не коэффициентов, а модуля преобразования:  $\sqrt{\text{Re}[C(t, s)]^2 + \text{Im}[C(t, s)]^2}$ .

### **1.3. Метод максимальной энтропии Берга**

Метод максимальной энтропии Берга [5] относится к категории параметрических методов спектрального анализа. В подобных методах в соответствие исследуемому процессу задается априорная модель спектральной плотности и ставится задача оценки параметров модели на основании анализа исследуемого временного ряда. В методе Берга используется вариационный принцип и для оценки качества модели ищется процесс с максимальной энтропией или процесс, спектр которого соответствует наиболее случайному временному ряду, причем корреляционная функция этого ряда должна наилучшим образом совпадать с заданной последовательностью. Оценка спектральной плотности в методе Берга аналогична оценке с помощью авторегрессионной модели первого порядка с входным белым шумом. Метод Берга обладает, видимо, наивысшим спектральным разрешением среди всех спектральных методов. К недостаткам метода следует отнести отсутствие точной информации о величинах амплитуд и фаз обнаруживаемых гармоник, а также необходимость предварительного подбора порядка параметра авторегрессии, т.к. при больших параметрах, численно превышающих половину длины ряда, оценки по этому методу могут оказаться нестабильными и, в частности, может происходить расщепление спектральных компонент. Отметим также, что метод не предназначен для работы с простыми гармоническими сигналами.

## 2. АЛГОРИТМЫ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Программы для пакета Матлаб или скрипты хранятся в текстовых файлах с расширением «.m». Ниже приведены распечатки скриптов основных алгоритмов спектрального анализа, оформленных в виде функций или программ, и даны примеры их использования.

### 2.1. Алгоритмы фурье-преобразований

#### *Алгоритм быстрого фурье-преобразования*

Алгоритм быстрого фурье-преобразования (БПФ) был разработан Дж. Тьюки в середине 1960-х. Необходимо отметить, что БПФ не является преобразованием, отличным от ПФ, – это просто класс специальных алгоритмов, которые позволяют вычислять ПФ с существенной экономией времени. Поскольку быстродействие современных компьютеров достаточно высоко, то это преимущество алгоритма БПФ отходит на второй план. Мы рассматриваем этот алгоритм, т.к. БПФ входит в большинство статистических и математических пакетов и, кроме того, при его использовании возможны неточности в определении амплитуд и периодов гармоник. Ниже приведены функция, вычисляющая БПФ, и пример ее использования (пример 2.1).

Функция БПФ (файл SP\_FFT.m)

```
%*****%
```

```
function varargout = SP_FFT(X, l_f, h_f);
```

```
%-----
```

```
% SP_FFT вычисляет быстрое фурье-преобразование
```

```
% input: - X – временной ряд, состоит из 2-х столбцов.
```

```
%         первый столбец X(:, 1) – время наблюдений,
```

```
%         второй X(:, 2) – сигнал.
```

```
%         - h_l – нижняя частота.
```

```
%         - h_f – верхняя частота.
```

```
% output: - Амплитудный спектр.
```

```
%         первый столбец – период (1/частота).
```

```
%         второй – спектральная амплитуда.
```

```
%         - Максимумы спектра
```

```
%         первый столбец – период (1/частота).
```

```
%         второй – спектральная амплитуда.
```

```

% пример: [AM_F, Amax_F]=SP_FFT(y, l_f, h_f);
%-----
y(:, 1)= X(:, 1); N0 = length(X(:, 1));
y(:, 2)=X(:, 2);
    Pxw = fft(y(:, 2));
    Pxw(1) = []; ampl=[];
power1= Pxw.* conj(Pxw);
nyquist = 1/2;
% normalization of the periodogram
freq = (1:N0/2)/(N0/2)*nyquist;
power = power1(1:length(freq));
FT_IND = find(freq >= l_f & freq <= h_f);
    ampl(:,1) = 1./freq(FT_IND);
    ampl(:,2) = 2*sqrt(power(FT_IND))./N0;
%find max peaks
    DiffVec = diff(sign(diff([0;ampl(:, 2); 0])));
    IdV = find(DiffVec == -2);
    Amax = [ampl(IdV, 1), ampl(IdV, 2)];
if nargout >= 1
    varargout{1} = ampl;
end
if nargout >= 2
    varargout{2} = Amax;

end
%*****%

```

**Пример 2.1.** Файл P2\_1.m (рис. 2.1)

```

%*****%
clear
N0 = 300; N = 1:N0; y(:, 1) = N';
    x = cos(N.*(2*pi/3)) + 0.5*cos(N.*(2*pi/7))...
    + 0.3*cos(N.*(2*pi/15));
    y(:, 2) = x;
    T1 = 2; T2 = 25;
    h_f = 1/T1; l_f = 1/T2;

```

```

[Amp, MMM] = SP_FFT(y, l_f, h_f);
L = length(MMM(:, 1));
subplot(2, 1, 1)
plot(y(:, 1), y(:, 2))
title('Исходный ряд')
subplot(2, 1, 2)
plot(Amp(:, 1), Amp(:, 2), MMM(1:L, 1), MMM(1:L, 2), 'd',...
'MarkerFaceColor', 'r', 'MarkerSize', 3), grid on
title('Спектральный состав, БПФ')
%*****%

```

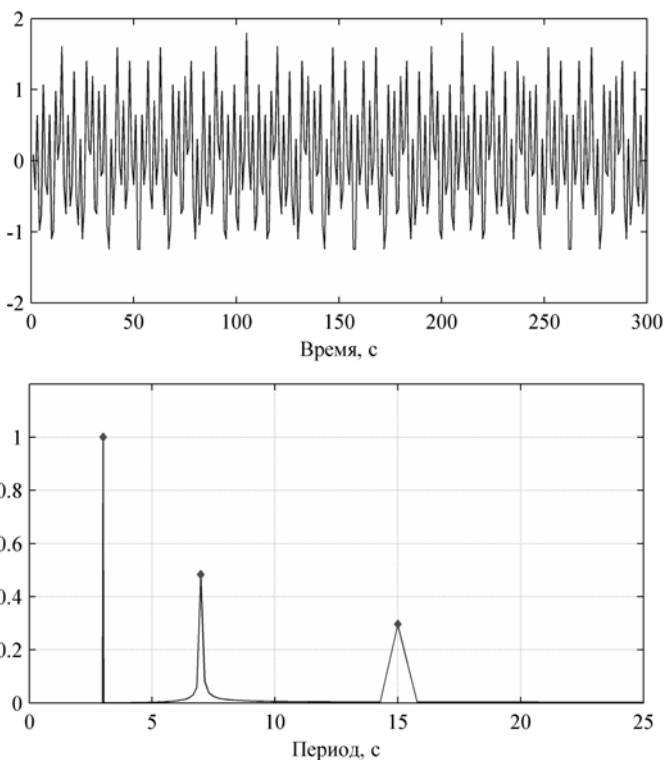


Рис. 2.1. Пример расчета методом БПФ. Вверху модельный ряд, внизу – спектр

### *Алгоритм классического фурье-преобразования*

Алгоритм классического фурье-преобразования (КПФ) можно реализовать в пакете Матлаб на основе выражения (1.3), т.к. этот пакет поддерживает вычисления с комплексными числами.

Функция КПФ (файл SP\_Class.m)

```
function varargout=SP_Class(X, l_f, h_f, df);
%-----
% SP_Class вычисляет классическое фурье-преобразование
% input:  - X-временной ряд, состоит из 2х столбцов.
%         - первый столбец X(:, 1) – время наблюдений,
%         - второй X(:, 2) – сигнал.
%         - h_l – нижняя частота.
%         - h_f – верхняя частота.
%         - df – дискретность расчетов
% output: - Амплитудный спектр.
%         - первый столбец – период (1/частота).
%         - второй – спектральная амплитуда.
%         - Максимумы спектра
%         - первый столбец – период (1/частота).
%         - второй – спектральная амплитуда.
% пример: [AM_S, Amax_S] = SP_Class(y, l_f, h_f, df);
%-----
y(:, 1) = X(:, 1); N0 = length(X(:, 1));
y(:, 2) = X(:, 2);
    f_ind = l_f;
    k = 1;
Pxx = []; %zeros((h_f-l_f)/df, 2);
while f_ind < h_f,
    Pxx(k,1) = f_ind; %frequency
    temp = abs(sum(y(:,2).*exp(-i*2*pi*f_ind*y(:,1))));
    Pxx(k,2) = temp*temp; %power
    f_ind = f_ind + df;
    k = k + 1;
end
ampl(:, 1) = 1./Pxx(:, 1);
ampl(:, 2) = 2*sqrt(Pxx(:, 2))./N0;
```

```

%find max peaks
DiffVec = diff(sign(diff([0; ampl(:, 2); 0])));
IdV = find(DiffVec == -2);
Amax = [1./Pxx(IdV, 1), ampl(IdV, 2)];
if nargout >= 1
    varargout{1} = ampl;
end
if nargout >= 2
    varargout{2} = Amax;
end
end
%*****%

```

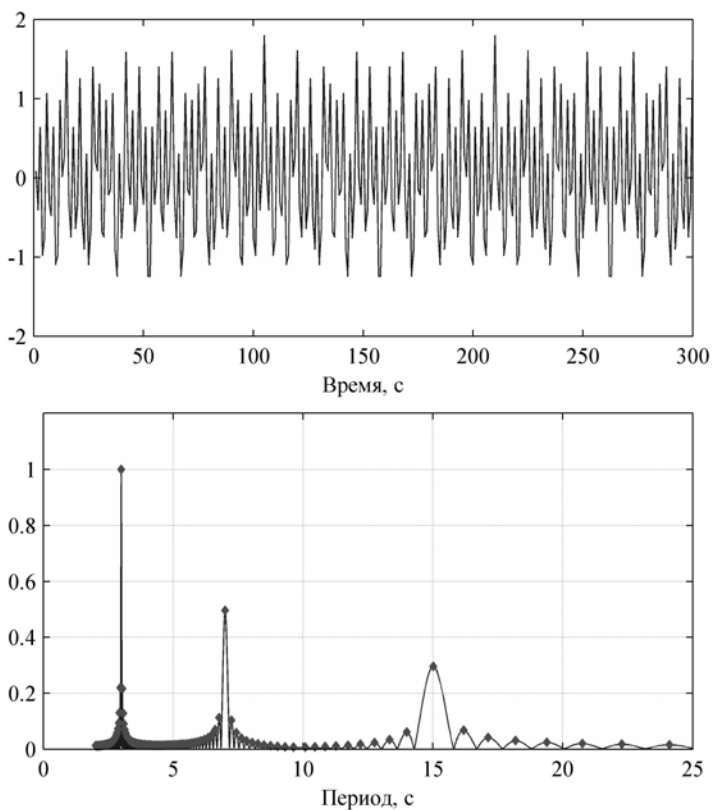


Рис. 2.2. Пример расчета методом КПФ. Вверху модельный ряд, внизу – спектр



**Пример 2.2.** Файл P2\_2.m (рис. 2.2)

```
%*****%
clear
N0 = 300; N = 1:N0; y(:, 1) = N';
x = cos(N.*(2*pi/3)) + 0.5*cos(N.*(2*pi/7))...
+ 0.3*cos(N.*(2*pi/15));
y(:, 2) = x;
T1 = 2; T2 = 25;
h_f = 1/T1; l_f = 1/T2; d = 0.0001;
[Amp, MMM] = SP_Class(y, l_f, h_f, d);
L = length(MMM(:, 1));
subplot(2, 1, 1)
plot(y(:, 1), y(:, 2))
title('Исходный ряд')
subplot(2, 1, 2)
plot(Amp(:, 1), Amp(:, 2), MMM(1:L, 1), MMM(1:L, 2), 'd',...
'MarkerFaceColor', 'r', 'MarkerSize', 3), grid on
%ylim([0 1.1])
title('Спектральный состав, КПФ')
```

**Алгоритм Скаржла (модифицированное фурье-преобразование)**

Алгоритм модифицированного классического фурье-преобразования (МФП) был предложен Скаржлом [5] для исследования временных рядов, содержащих неравномерно расположенные пропуски, и имеет более высокие точностные характеристики, особенно при анализе гармоник, период которых сопоставим с длиной ряда.

Согласно [5], МФП вычисляется по следующим формулам:

$$P(\omega) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\left[ \sum_k X_k \cos \omega(t_k - \tau) \right]^2}{\sum_k \cos^2 \omega(t_k - \tau)} + \frac{\left[ \sum_k X_k \sin \omega(t_k - \tau) \right]^2}{\sum_k \sin^2 \omega(t_k - \tau)} \right\},$$

где  $\tau$  определяется выражением

$$\tan(2\omega\tau) = \left( \sum_k \sin 2\omega t_k \right) / \left( \sum_k \cos 2\omega t_k \right).$$

Функция МПФ (файл SP\_Scrgl.m)

```
function varargout = SP_Scrgl(X, l_f, h_f, df)
%-----
% SP_Scrgl вычисляет модифицированное фурье-преобразование
% (метод Скаржла)
% input:  - X – временной ряд, состоит из 2-х столбцов.
%          первый столбец X(:, 1) – время наблюдений,
%          второй X(:, 2) – сигнал.
%          - h_l – нижняя частота.
%          - h_f – верхняя частота.
%          - df – дискретность расчетов
% output: - Амплитудный спектр.
%          первый столбец – период (1/частота).
%          второй – спектральная амплитуда.
%          - Максимумы спектра
%          первый столбец – период (1/частота).
%          второй – спектральная амплитуда.
% пример: [AM_S, Amax_S]=SP_Scargl(y, l_f, h_f, df);
%-----
y(:, 1) = X(:, 1); N0 = length(X(:, 1));
y(:, 2) = (X(:, 2));
    f_ind = l_f;
    k = 1;
P_xw = []; %zeros((h_f-l_f)/df, 2);
while f_ind < h_f,
    P_xw(k,1) = f_ind; om = 2.*pi.*f_ind;
    tau = sum(sin(2.*om.*y(:, 1)))./sum(cos(2.*om.*y(:, 1)));
    tau = atan(tau)./(2.*om);Axc = cos(om.*(y(:, 1) - tau));
    Axs = sin(om.*(y(:, 1) - tau));Ax1 = sum(y(:, 2).*Axc);
    Ax1 = Ax1.*Ax1; Ax2 = sum(y(:, 2).*Axs); Ax2 = Ax2.*Ax2;
    temp = Ax1./sum(Axc.*Axc) + Ax2./sum(Axs.*Axs);
    P_xw(k,2) = 0.5.*temp;
    f_ind = f_ind + df;
    k = k + 1;
end;
% normalization of the periodogram
```

```

power(:, 1) = 1./Pwx(:, 1);
power(:, 2) = 2*sqrt(Pwx(:, 2)./(N0)); %NDate;
lll = length(Pwx(:, 2));
if nargout >= 1
    varargout{1} = power;
end
if (nargout >= 2),
    DiffVec = diff(sign(diff([0; power(:, 2); 0])));
    IdV = find(DiffVec == -2);
    Amax = [1./Pwx(IdV, 1), power(IdV, 2)];
    varargout{2} = Amax;
end
end
%*****%

```

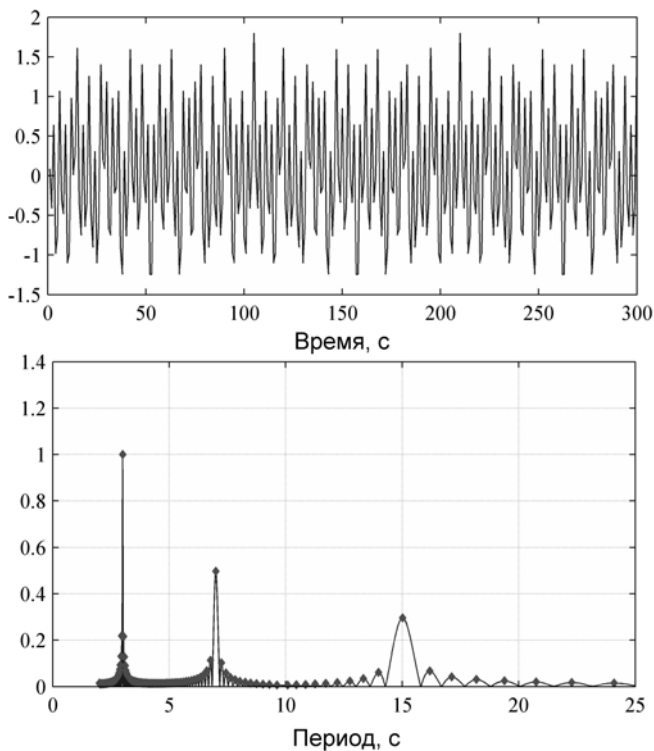


Рис. 2.3. Пример расчета методом МПФ. Вверху модельный ряд, внизу – спектр

**Пример 2.3.** Файл P2\_3.m (рис. 2.3).

```
%*****%
clear
N0 = 300; N = 1:N0; y(:, 1) = N';
    x = cos(N.*(2*pi/3)) + 0.5*cos(N.*(2*pi/7))...
    + 0.3*cos(N.*(2*pi/15));
    y(:, 2) = x;
    T1 = 2; T2 = 25;
    h_f = 1 / T1; l_f = 1 / T2; d = 0.0001;
    [Amp, MMM] = SP_Scrgl(y, l_f, h_f, d);
    L = length(MMM(:, 1));
subplot(2, 1, 1)
    plot(y(:, 1), y(:, 2))
    title('Исходный ряд')
subplot(2, 1, 2)
    plot(Amp(:, 1), Amp(:, 2), MMM(1:L, 1), MMM(1:L, 2), 'd',...
'MarkerFaceColor', 'r', 'MarkerSize', 3), grid on
%ylim([0 1.1])
    title('Спектральный состав, МПФ')
```

## 2.2. Алгоритм метода максимальной энтропии Берга

Метод максимальной энтропии (ММЭ) относится к алгоритмам авторегрессионного спектрального оценивания с включением оценочных механизмов метода наименьших квадратов. Наиболее ясное изложение стандартного алгоритма вычислений содержится в известной книге Марпла [2] и частично в «Help» Матлаб. В данном пособии мы ограничимся замечанием, что в отличие от других известных алгоритмов мы используем на одном из этапов вычислений вместо быстрого фурье-преобразования более точный алгоритм Скаржла МПФ.

Функция ММЭ (файл SP\_Burg.m)

```
function varargout = SP_Burg(X, l_f, h_f, df, pp)
%-----
% SP_Burg вычисляет спектральные оценки методом Берга
% input:  - X – временной ряд, состоит из 2-х столбцов.
%         первый столбец X(:, 1) – время наблюдений,
%         второй X(:, 2) – сигнал.
```

```

%      - h_l – нижняя частота.
%      - h_f – верхняя частота.
%      - df – дискретность расчетов
%      - pp – порядок авторегрессии
% output: - Амплитудный спектр.
%          первый столбец – период (1/частота).
%          второй – спектральная амплитуда.
%      - Максимумы спектра
%          первый столбец – период (1/частота).
%          второй – спектральная амплитуда.
% пример: [AM_B, Amax_B] = SP_Burg(y, l_f, h_f, df, pp);
%-----
x = X(:, 2); N = length(x); p = round(pp);
    % Tl = l_f; Th = h_f;
ef = x; eb = x; a = 1;
E = x'*x / N; K = zeros(p, 1);
for i = 2:p + 1,
    ep = ef(i:N); em = eb(i-1:N-1);
    K(i-1) = 2 * ep' * em / (ep'*ep + em'*em);
    a = [a;0] - K(i-1) * [0;flipud(a)];
    for j = N:-1:i,
        ef_old = ef(j);
        ef(j) = ef(j) - K(i-1) * eb(j-1);
        eb(j) = eb(j-1) - K(i-1) * ef_old;
    end
    E(i) = (1 - K(i-1)*K(i-1)) * E(i-1);
end
% Power density for AR estimate
Z(:, 2) = a; Na = 1:length(a); Z(:, 1) = Na';
[power] = SP_Scrgl(Z, l_f, h_f, df);
Pxx = E(end) ./power(:, 2);
DiffVec = diff(sign(diff([0; Pxx; 0])));
IdV = find(DiffVec == -2);
Amax = [power(IdV, 1), Pxx(IdV)];
L = length(Amax); ampl = [power(:, 1) Pxx];

```

```

if nargout >= 1
    varargout{1} = ampl;
end
if nargout >= 2
    varargout{2} = Amax;
end

```

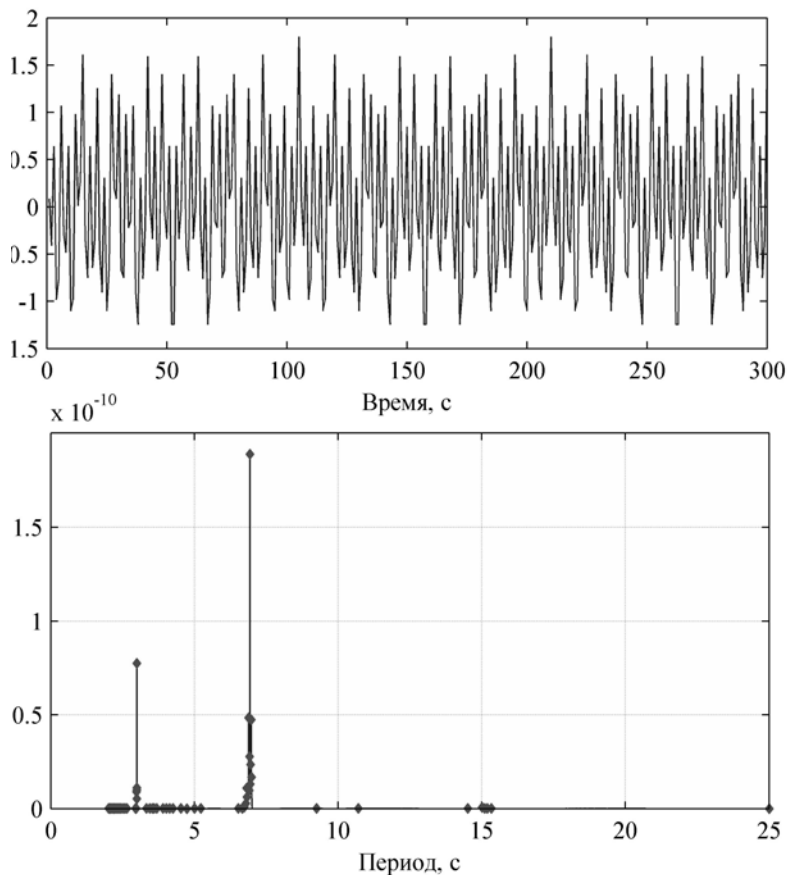


Рис. 2.4. Пример расчета методом Берга. Вверху модельный ряд, внизу – спектр

**Пример 2.4.** Файл P2\_4.m (рис. 2.4).

```
clear
N0 = 300; N = 1:N0; y(:, 1) = N';
    x = cos(N.*(2*pi/3)) + 0.5*cos(N.*(2*pi/7))...
    + 0.3*cos(N.*(2*pi/15));
y(:, 2) = x; T1 = 2; T2 = 25; h_f = 1 / T1; l_f = 1 / T2; d = 0.0001;
[Amp, MMM] = SP_Burg(y, l_f, h_f, d, N0/2);
L = length(MMM(:, 1));
subplot(2, 1, 1); plot(y(:, 1), y(:, 2)); title('Исходный ряд')
subplot(2, 1, 2);
    plot(Amp(:, 1), Amp(:, 2), MMM(1:L, 1), MMM(1:L, 2), 'd',...
'MarkerFaceColor', 'r', 'MarkerSize', 3), grid on
    title('Спектральный состав, Берг')
```

### 2.3. Сопоставление методов Берга и Фурье

Приведенные выше рисунки (2.1–2.4) приводят, на первый взгляд, к выводу об адекватности рассмотренных методов (по крайней мере, в части, касающейся величин находимых периодов). И второе, зачем нужны модификации БПФ, если периоды и амплитуды гармоник, найденные с его помощью, почти неотличимы от значений, полученных методами КПФ и МПФ?

Для ответа на эти вопросы рассмотрим влияние на результаты спектрального анализа длины ряда. Составим ряд, с дискретностью 1 с, не содержащий пропусков и состоящий из одной гармоники с периодом  $T = 45$  с и амплитудой  $A = 1$ . Начальная длина ряда равна 25 с, т.е. примерно полупериоду гармоники. Будем постепенно увеличивать длину ряда на одну секунду, пока длина ряда не превысит 4 периода. Добавим к этому ряду нормально распределенный шум с амплитудой 1/2 от амплитуды наиболее мощной гармоники. Программа расчетов (P2\_5.m) приведена ниже.

**Пример 2.5.** Расчет четырьмя методами (файл P2\_5.m)

```
%-----
% сравнение 4-х методов спектрального анализа
% при увеличении длины ряда от m0 до N0
%-----
clear
```

```

% составляем ряд (T – период, A – амплитуда, N0 – длина ряда)
% и добавляем норм. распр. шум R амплитудой A/2.
T = 45; A = 1; N0 = 150;
m0 = 25; % начальная длина ряда
t = 1:N0; y(:, 1) = t'; R = (rand(N0, 1)*1);
x = A * sin (t.*(2*pi/T) ) + R'-mean(R);
y(:, 2) = x;
% Задаем граничные периоды T1 < T < T2 и шаг df (нужен
% для КПФ и МПФ)
T1 = 30; T2 = 60; h_f = 1/T1; l_f = 1/T2; df = 0.00005; % в 1/время
%****Fast Fourier Transform*****
for m = m0:1:N0 %цикл по длине ряда
    AF = 0; TF = 0;
    [Amp] = SP_FFT(y(1:m, :), l_f, h_f);
% найдем амплитуду и период максимума обычным методом:
    L = length(Amp(:, 1)); MAXF = 0;
    for p = 1:L
        if Amp(p, 2) >= MAXF
            MAXF = Amp(p, 2); AF = Amp(p, 2); TF = Amp(p, 1);
        end
    end
    SFfft(m, 2) = AF; SFfft(m, 1) = TF;
end
%****Classic Fourier*****
for m = m0:1:N0 % цикл по длине ряда
    ANN = 0; FNN = 0;
    [AMPL] = SP_Class(y(1:m, :), l_f, h_f, df);
% Ищем максимумы, используя функцию "max":
% нам нужен max по амплитуде и номер строки, чтобы
% сопоставить амплитуде гармоники ее частоту
    [ANN, FNN] = max(AMPL(:, 2));
    SFcft(m, 2) = ANN;
    SFcft(m, 1) = AMPL(FNN, 1);
end

```



```

%****Scargle Fourier*****
for m = m0:1:N0 %цикл по длине ряда
    AN = 0; FN = 0;
    [AM] = SP_Scrgl(y(1:m, :), l_f, h_f, df);
% максимум
    [AN, FN] = max(AM(:, 2));
    SFmft(m, 2) = AN;
    SFmft(m, 1) = AM(FN, 1);
end
%****Burg*****
for m = m0:1:N0 %цикл по длине ряда
    Ab = 0; Fb = 0;
    [Abr] = SP_Burg(y(1:m, :), l_f, h_f, df, m/2);
%максимум
    [Ab, Fb] = max(Abr(:, 2));
    SFbft(m, 2) = Ab;
    SFbft(m, 1) = Abr(Fb, 1);
end
% ****Plotting*****
subplot(4, 2, 1); plot(m0:N0, SFfft(m0:N0, 1)); grid on
    title('БПФ, период');
subplot(4, 2, 2) plot(m0:N0, SFfft(m0:N0, 2)); grid on
    title('БПФ, Амплитуда')
subplot(4, 2, 3); plot(m0:N0, SFcft(m0:N0, 1)); grid on
    title('КПФ, период')
subplot(4, 2, 4); plot(m0:N0, SFcft(m0:N0, 2)); grid on
    title('КПФ, Амплитуда')
subplot(4, 2, 5); plot(m0:N0, SFmft(m0:N0, 1)); grid on
    title('МПФ, период');
subplot(4, 2, 6); plot(m0:N0, SFmft(m0:N0, 2)); grid on
    title('МПФ, Амплитуда')
subplot(4, 2, 7); plot(m0:N0, SFbft(m0:N0, 1));grid on
    title('Берг, период');
    Xlabel('Длина ряда, сек')
subplot(4, 2, 8); plot(m0:N0, SFbft(m0:N0, 2)); grid on
    title('Берг, Амплитуда')
    Xlabel('Длина ряда, сек')

```

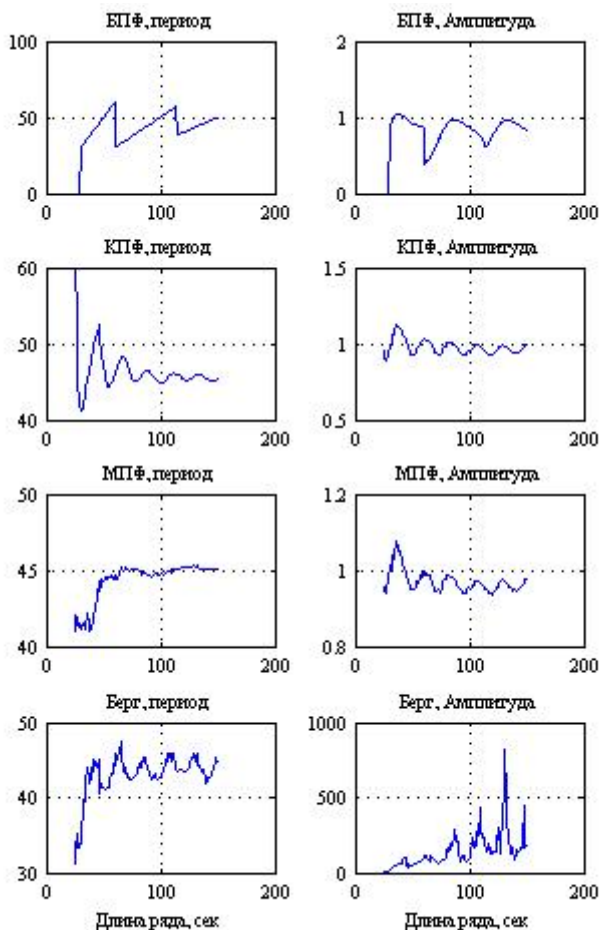


Рис. 2.5. Пример расчета четырьмя методами при постепенном увеличении длины ряда (обратите внимание на различия в шкале ординат)

Результаты расчетов показаны на рис. 2.5. Из рисунка видно, что БПФ дает правильные результаты для амплитуд только в случае, когда период гармонике укладывается на длине ряда в целое число раз.

В остальных случаях **независимо от длины ряда** значения амплитуды могут существенно отличаться от истинных. Для частоты

(периода) точность ее определения растет с длиной ряда (при длине ряда, превышающей 10 периодов гармоник, достигает ~2%). Классическое преобразование Фурье дает существенно меньшие погрешности определения амплитуды и частоты. Уже при длине ряда, равной 2 периодам гармоник, ошибки в определении амплитуды и частоты не превышают примерно 5%. Расчеты по алгоритму МПФ дают при определении периодов колебаний наилучшие результаты. Следует однако, заметить, что машинное время, требуемое для расчетов по методике МПФ, существенно превышает время, требуемое при использовании методов БПФ и КПФ. Что касается метода Берга, то он дает приемлемые результаты по периодам и, как указывалось в разделе 1, не дает ответа на вопрос, каковы амплитуды гармоник. Однако сразу подчеркнем, что метод Берга плохо работает с гармоническими сигналами (именно поэтому мы в этом примере «зашумили» исходный синусоидальный ряд).

Преимущества метода Берга в идентификации частот колебаний будут очевидными при анализе сложных и сильно зашумленных рядов.

#### **2.4. Алгоритм вейвлет-преобразования**

В пакете Матлаб содержится очень неплохо составленные интерактивные разделы, дающие представление о возможностях вейвлетного анализа (запуск командами «wavedemo» и «wavemenu»). Однако для практического применения приведенные в этих разделах примеры не очень подходят. Ниже приведены функция вейвлетного анализа и пример получения спектральных оценок с выводом результатов анализа в виде 3-мерной графики.

Функция вейвлетного анализа (файл SP\_wave3.m)

```
function SP_wave3(X, T_l, T_h, df, Stn,zz)
%-----
% SP_wave3 вычисляет спектральные оценки методом
%вейвлетного анализа с 3-мерным представлением результатов
%!!! df=0.1 only in this script
% input:  - X – временной ряд, состоит из 2-х столбцов.
%         первый столбец X(:, 1) – время наблюдений,
%         второй X(:, 2) – сигнал.
```

```

%      - T_1 – нижний период.
%      - T_f – верхний период.
%      - df – дискретность расчетов
%      - Stn – периоды сечений и оцифровки оси X
%      - zz – масштабный множитель для рисования X
% output: - Вейвлетограмма.
% пример: SP_wave3(x, T1, T2, df, A, B);
%-----
    dT = 0.1; %!!! df;
    y = X(:, 2); N0 = length(y)
    div = 1.234567894; %scale-factor
    T = y'; TD = T';
    sc1 = T_1; sc2 = dT; sc3 = T_h;
    scales1 = sc1:sc2:sc3; %сетка масштабов
    time = 1:N0; %сетка времен
    figure(1)
%вычисляем коэффициенты непр. ВП с ф-й Морле:
    coefs1 = cwt(T(1, :), scales1, 'morl', '3Dlvl');
    [X, Y] = meshgrid(scales1, time); %сетка для рисунка:
    mesh(X, Y, coefs1');
    colormap(jet(56))
    view(-145,72); %развертка рисунка в 3Д
    f = findobj('Type', 'surface');
    set(f, 'FaceLighting', 'phong', 'FaceColor', 'flat');
    material shiny
    shading interp
    set (gca, 'XDir', 'rev', 'YDir', 'rev')
%оцифровка оси по нужным сечениям:
    periods1 = Stn; NWaw1 = periods1./div;
    set(gca, 'XTick', NWaw1, 'XTickLabel', periods1); xlabel('Period');
    Aylabel = [100 200 300];
    set(gca, 'YTick', Aylabel, 'YTickLabel', Aylabel); ylabel('Time');
hold on
%Выделим из матрицы коэффициентов ВП нужные нам периоды
    periods2 = Section; NWaw2 = periods2./div;
    coefs2 = cwt(T, NWaw2, 'morl');

```

```

% наложим отдельные кривые на плоскость XY
[X, Y] = meshgrid(NWaw2, time);
plot3(X, Y, coefs2');
%нарисуем на заднем плане исходный временной ряд
%в приемлемом масштабе zz
[X, Y] = meshgrid(0, time);
plot3(X, Y, zz*y', 'black');
hold off

```

Как отмечалось, вейвлет-преобразование позволяет «развернуть» двумерный спектр (амплитуда-частота) в третьей плоскости – плоскости времени. Это дает возможность оценить, как ведут себя с течением времени основные гармоники. Рассмотрим простой пример использования приведенной выше функции для анализа ряда, состоящего из трех синусоид, и нормально распределенного шума. «Изюминка» состоит в том, что синусоиды существуют в течение ограниченных периодов времени.

### **Пример 2.6.** Файл P2\_6.m (рис. 2.6)

```

%пример использования вейвлет-преобразования
clear
%составим ряд из 3х гармоник + шум
N0 = 300; DN = 1; R1 = (rand(N0, 1)*1); R = R1-mean(R1);
N=1:N0;
y(:, 1) = N'; N1 = 1:100; N2 = 101:200; N3 = 201:300;
x1 = cos(N1.*(2*pi/15)); x2 = cos(N2.*(2*pi/12));
x3 = cos(N3.*(2*pi/7)); y(1:100, 2) = x1' + R(1:100);
y(101:200, 2) = x2' + R(101:200);
y(201:300, 2) = x3' + R(201:300);
subplot(2, 1, 1); plot(y(:, 1), y(:, 2))
subplot(2, 1, 2)
T1 = 3; T2 = 20; df = 0.1; SS = [7 12 15];
SP_wave3(y, T1, T2, df, SS, 2); set(gca, 'XLim', [3 20]);

```

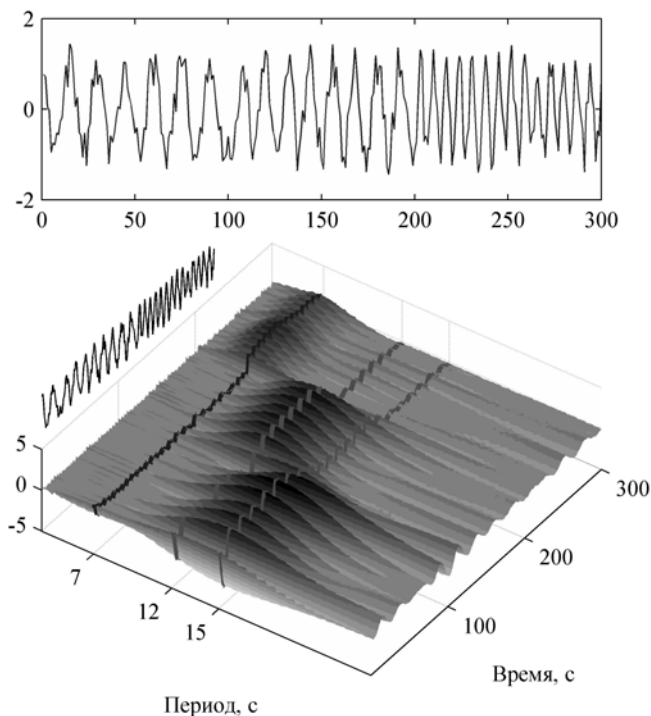


Рис. 2.6. Пример вейвлет-преобразования для модельного ряда, состоящего из трех гармоник 7, 12 и 15 с, каждая длительностью 100 с (модельный ряд показан в верхней части рисунка)

Из рисунка отчетливо видна структура развития основных гармоник во времени. Поскольку читатель теперь владеет всеми рассматриваемыми в пособии методами спектрального анализа, ему предлагается сопоставить результаты (рис. 2.6) с амплитудными спектрами, которые можно получить для того же временного ряда методами Фурье и Берга. Вы увидите, что эти методы дадут Вам довольно точно периоды гармоник, чуть хуже величины амплитуд, но главное, Вы будете думать, что все три гармоники существовали в течение всего анализируемого периода, что не соответствует действительности.

## 2.5. «Скользящие» преобразования

Вопрос, который мы перед собой можем теперь поставить, заключается в следующем. Является ли вейвлет-преобразование (или его аналог [6]) единственным способом «разглядеть» трансформацию структуры спектра с течением времени? Конечно нет. И до вейвлетного анализа, и в настоящее время разрабатывались и разрабатываются независимые методы так называемого скользящего спектрального анализа. Многочисленные варианты таких методов нет возможности рассмотреть в этом пособии, поэтому мы используем уже знакомые нам алгоритмы Фурье и Берга, немного приспособив их к анализу временной изменчивости спектров.

### *Частотно-модулированные временные ряды*

Составим довольно «заковыристый» временной ряд  $y_3$  длиной  $N = 300$  с, содержащий три частотные составляющие с периодами 7, 12, 137 с с амплитудой  $A = 1$ , 1 и 0.3 плюс нормально распределенный белый шум амплитудой  $A = 0.5$  и плюс две квази-частотно-модулированные компоненты FM1 и FM2 с центрами вблизи 32 и 77 с. Период первой компоненты ( $A = 0.75$ ) увеличивается в течение всего периода от 25 до 40 с, второй ( $A = 0.5$ ) – убывает от 85 до 70 с. Временной ряд, который состоит из тех же гармоник (7, 12, 32, 77, 137 с) и шума, но не содержит модулированных компонент, запишем в третий столбец файла `y3series.dat`.

### **Пример 2.7.** Файл `P2_7.m` (рис. 2.7)

```
%Модельный ряд y3series
clear
N0 = 300; N = 1:N0; DN = 1; R = (rand(N0, 1)*1);
    y3(:, 1) = N';
t1 = 25:0.05:39.95; %модуляция от 40 до 55 с
    x1 = 0.75.*cos(N.*(2*pi./t1));
t2 = 85:-0.05:70.05; % модуляция от 85 до 70 с
    x2 = 0.5.*cos(N.*(2*pi./t2));
x3 = cos(N.*(2*pi/12)) + cos(N.*(2*pi/7)) + 0.3*cos(N.*(2*pi/137));
    y3(:, 2) = x1' + x2' + x3' + R;
x4 = 0.75.*cos(N.*(2*pi/32)) + 0.5.*cos(N.*(2*pi/77));
    y3(:, 3) = x3' + x4' + R;
```

```
plot(N, x1, N, x2, N, y3(:, 2), 'r'); grid on
save('y3series.dat', 'y3', '-ascii')
xlabel('Период, сек'); ylabel('Амплитуда'); title('Модельный ряд')
```

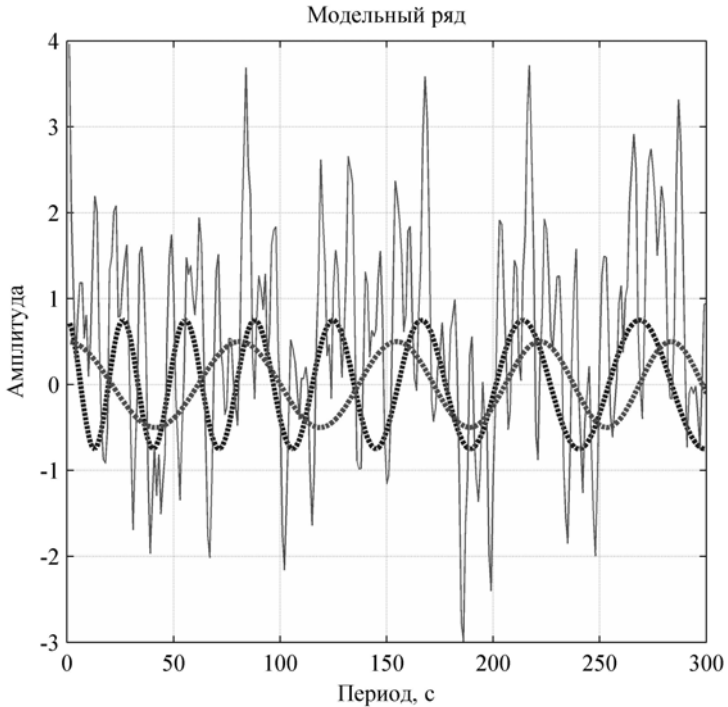


Рис. 2.7. Ряд  $y_3$ , содержащий нестационарные компоненты и шум (отдельно штриховыми линиями показаны частотно-модулированные гармоники)

Результаты расчета амплитудных спектров для ряда с частотно-модулированными компонентами и для суммы отдельных гармоник с помощью метода МПФ показан на рис. 2.8 (программа P2\_8).



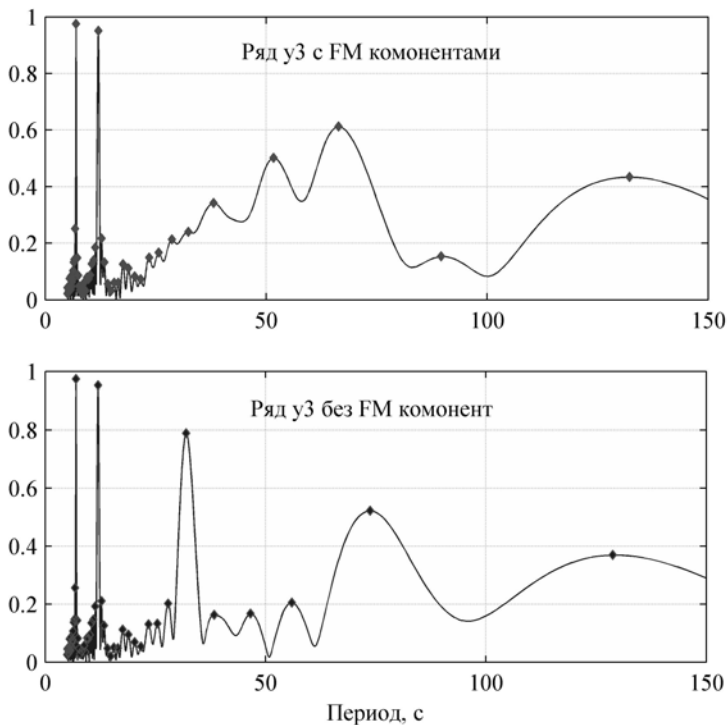


Рис. 2.8. Амплитудные спектры ряда  $y_3$  (метод МПФ, сверху – ряд с частотной модуляцией)

**Пример 2.8.** Файл P2\_8.m (рис. 2.8)

```
clear
load y3series.dat; y3 = y3series;
y11(:, 1) = y3(:, 1); y11(:, 2) = y3(:, 2);
y12(:, 1) = y3(:, 1); y12(:, 2) = y3(:, 3);
N0 = length(y3(:, 1)); T1 = 150; T2 = 5; l_f = 1/T1; h_f = 1/T2;
df = 0.0001;
[AM_S, Amax_S] = SP_Scrgl(y11, l_f, h_f, df);
L = length(Amax_S(:, 1));
subplot(2, 1, 1)
plot(AM_S(:, 1), AM_S(:, 2), Amax_S(1:L, 1), Amax_S(1:L, 2),'d',...
'MarkerFaceColor','r', 'MarkerSize', 3), grid on
title('Ряд у3 с FM компонентами')
```

```

[AM_S2, Amax_S2] = SP_Scrgl(y12, l_f, h_f, df);
L = length(Amax_S2(:, 1));
subplot(2, 1, 2)
plot(AM_S2(:,1), AM_S2(:,2), Amax_S2(1:L,1), Amax_S2(1:L,2),...
'd', 'MarkerFaceColor', 'b', 'MarkerSize', 3), grid on
xlabel('Период, с'); title('Ряд у3 без FM компонент')
%*****

```

Из рис. 2.8 следует, что даже при наличии большой шумовой компоненты метод МПФ дает достаточно точные оценки частот и периодов суммы гармоник. Однако при наличии частотной модуляции (верхний рисунок) спектральная плотность двух гармоник распределена в широком диапазоне 20–80 с и сделать какие-либо выводы о характере спектра в этом диапазоне затруднительно.

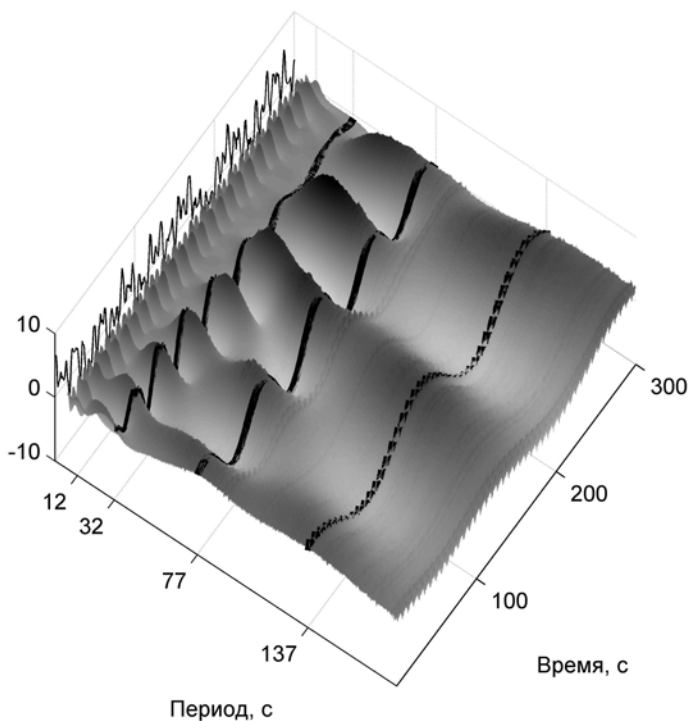


Рис. 2.9. Вейвлетограмма ряда у3 для периодов от 10 до 159 с; сплошными линиями показаны сечения вейвлетограммы для периодов 32, 77 и 137 с

На рис.2.9 показан частотно-модулированный ряд  $y_3(:, 2)$  в интерпретации вейвлетного преобразования:

**Пример 2.9.** Файл P2\_9.m (рис. 2.9)

```
clear
load y3series.dat; y=y3series(:,1:2);
T1 = 5; T2 = 150; df = 0.1; SS = [32 77 137];
SP_wave3(y, T1, T2, df, SS,2);
%*****
```

Сплошные кривые соответствуют периодам 32, 77 и 137 с и наложены на вейвлетограмму для лучшей различимости временного хода этих спектральных компонент.

Несомненным достоинством вейвлетного анализа является возможность сразу качественно определить характер поведения нестационарных спектральных компонент. Из рис. 2.9 видно, что период компоненты вблизи 32 с растет в течение всего периода измерений, период второй компоненты постепенно уменьшается и при  $t > 150-200$  с сливается с первой. Компоненты с периодом 12 и 7 с (не показаны на рисунке) имеют стабильные период и амплитуду. Наиболее низкочастотная компонента также четко просматривается.

Однако ВП имеет и свои недостатки. Мы специально составили короткий ряд с довольно тесно расположенными гармониками, чтобы продемонстрировать довольно низкое разрешение ВП. Частотно – модулированные компоненты частично перекрываются также с низкочастотной гармоникой. Заметно влияние (см. низкочастотную компоненту) краевых эффектов, аналогичных эффекту Гиббса, имеются сложности в абсолютной привязке найденных амплитуд.

***Скользящий фурье-анализ***

Временная изменчивость амплитуд и периодов гармоник может быть проанализирована и с помощью фурье-преобразования. Имеется немало разновидностей соответствующих алгоритмов, существо которых сводится к построению спектров для различных временных отрезков анализируемого ряда. Естественно, что чем меньше такой отрезок, тем более заметна потеря в спектральном разрешении.

Мы рассмотрим алгоритм, в котором ФП вычисляется для отрезка ряда некоторой длины (окна), расположенного в начале анализируемого ряда, а затем это окно последовательно сдвигается на один отсчет и снова проводится ФП, и так далее, пока окно не достигнет конца ряда.

**Пример 2.10/** Файл P2\_10.m (рис. 2.10)

```
clear
load y3; y(:, 1:2) = y3(:, 1:2); Ny = length(y(:, 1));
mm = 1; T1 = 20; T2 = 100; l_f = 1/T2; h_f = 1/T1; df = 0.0001;
fi_0 = 1; fi_n = 300;
long = 100; %длина скользящего окна
for kk = long:1:Ny
yik(1:long, 1:2) = y((kk-(long-1)):kk, 1:2);
[AM] = SP_Scrgl(yik, l_f, h_f, df);
Sdat(:, mm) = AM(:, 2);
mm = mm + 1;
yik = [];
end
LL = length(Sdat(:, 1))
Z = (Sdat');
time = 1:mm-1;
[X, Y] = meshgrid(AM(:, 1), time);
[A, B, C] = contourf(X, Y, Z, 8);
% set(B, 'Edgecolor', 'none');
fitick = (1:long/1:fi_n-fi_0);
fitick1 = (fi_0 + long/2:long/1:fi_n);
set(gca, 'YTick', fitick);
set(gca, 'YTickLabel', round(fitick1));
xlabel('Periods, sec');
colorbarf1(A, B);
ylabel('Time, sec');
%*****
```

Длина окна так же, как и диапазон периодов, для которых ведется расчет, обычно варьируются. На рис. 2.10 показан скользящий

спектр с окном длиной  $1/3$  от длины ряда. Первая из ЧМ гармоник имеет в начале ряда период 32–35 с и амплитуду 0.7–0.9, вторая – период 70–80 с и амплитуду 0.6–0.7. Во второй половине ряда разрешение МПФ оказывается недостаточным и компоненты сливаются. Варьируя длину окна и спектральный диапазон, читатель может проанализировать поведение других спектральных компонент и сопоставить полученные результаты с анализом ряда  $u_3(:, 3)$ , в котором нет частотно-модулированных компонент.

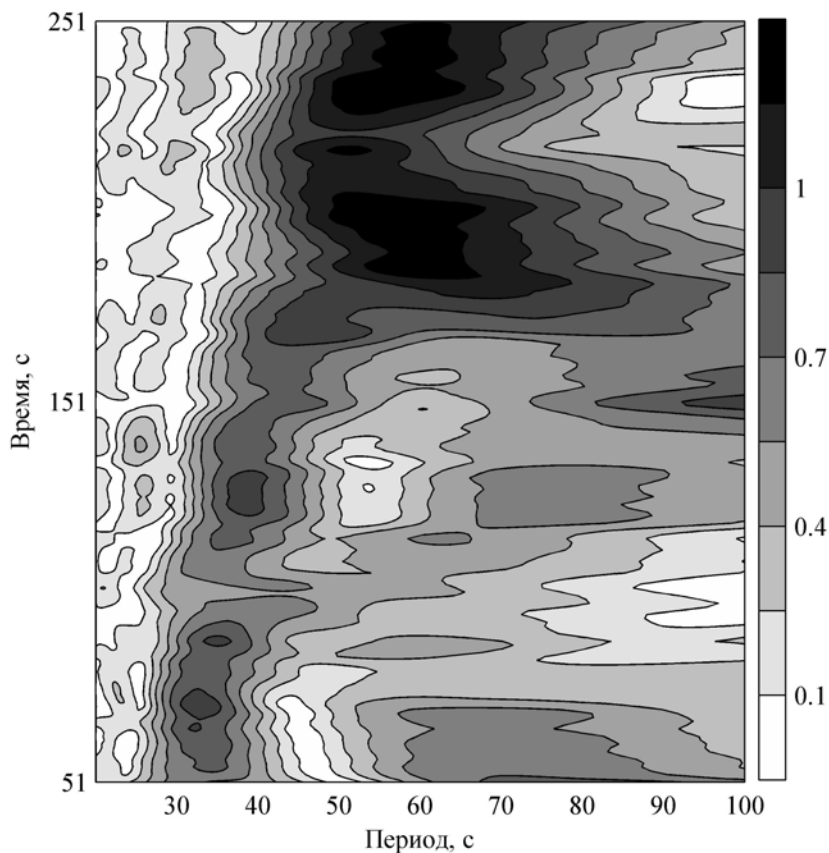


Рис. 2.10. Амплитудный спектр, полученный с помощью МПФ и скользящего окна длиной 100 с

### *Скольльзящий анализ на основе метода Берга*

Используем метод Берга для анализа временной структуры ряда  $y_3$ , составив программу «скольжения» аналогично описанному выше для метода МПФ.

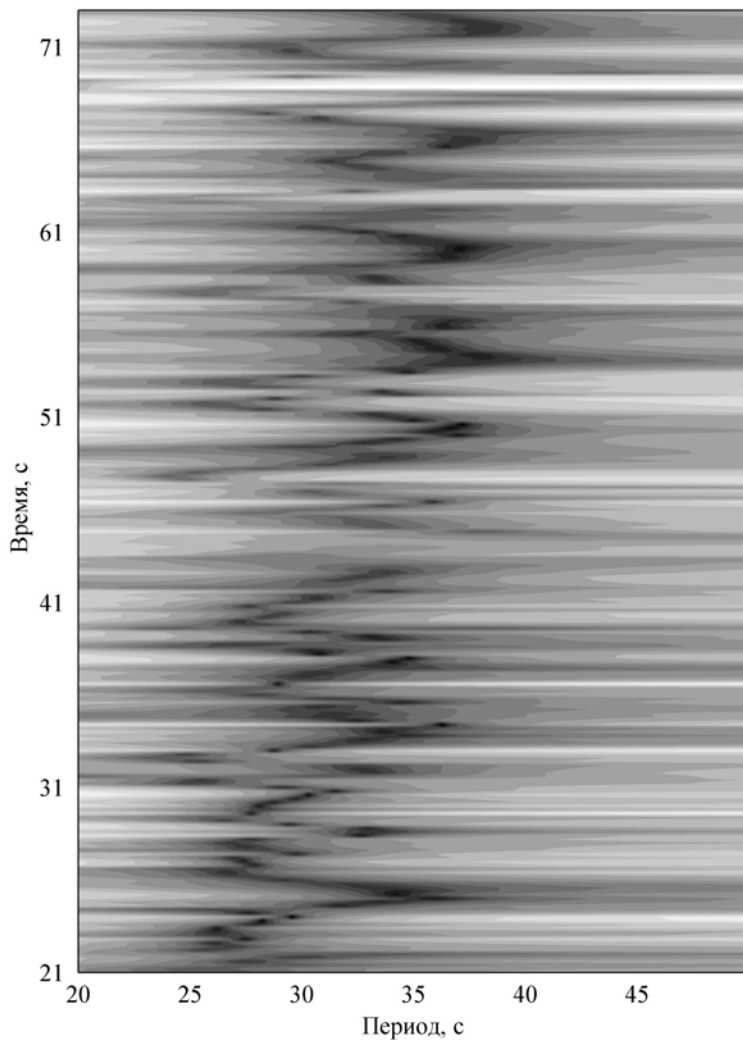


Рис. 2.11. Скользящий спектральный анализ на основе метода максимальной энтропии Берга

Спектр, полученный для спектрального диапазона 20–50 с с использованием скользящего окна, равного 40 с и параметра авторегрессии 25, показан на рис. 2.11. Метод максимальной энтропии четко показывает рост периода одной из частотно-модулированных гармоник от 25–27 с до 36–38 с. Напомним, что при использовании метода Берга необходим предварительный анализ устойчивости метода для каждого конкретного ряда – определение порядка авторегрессии. При увеличении порядка авторегрессии и приближении его от минимальной (обычно половина длины ряда) к максимальной величине, близкой к длине ряда, спектральное разрешение метода существенно возрастает. Однако на каком-то этапе устойчивость может нарушиться – происходит трансформация структуры спектра, а иногда и расщепление гармоник.

### 3. РАСЧЕТ ЗНАЧИМОСТИ ОЦЕНОК

Цифровые спектральные методы анализа временных рядов в последние десятилетия получили новый стимул в связи быстрым ростом вычислительной техники. Однако одна из ключевых позиций спектрального анализа – определение доверительных границ или значимости параметров находимых гармоник или периодичностей – в большинстве публикаций остается на наш взгляд слабым местом. Сведения о методах оценки значимости, приводимые в публикациях, чаще всего недостаточны, чтобы читатель мог независимо проверить обоснованность статистических оценок, и к этому часто добавляется недостаток информации об используемых методах предварительной обработки анализируемых рядов.

Поэтому авторы попытались систематизировать практические методы оценки значимости находимых во временных рядах периодических сигналов на примере ряда  $y_3(:, 3)$ , рассмотренного в предыдущем разделе. Напомним, что этот ряд (далее  $y_3$ ) находится в третьем столбце файла `y3series.dat` и не содержит частотно-модулированных компонент. С помощью программы, использующей МПФ (`P2_8.m`), найдем значения периодов основных гармоник, чьи амплитуды превышают 0.2 (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Периоды  $T$ , амплитуды  $C$  гармоник ряда  $u_3$ 

$T$		7	12			32		77	137
$C$		1	1			0.75		0.5	0.3
$T(\text{МПФ})$	6.8	7	12	12.8	27.9	32	56	74	129
$C(\text{МПФ})$	0.26	0.97	0.95	0.21	0.2	0.79	0.21	0.5	0.37

В таблицу формально включены некоторые колебания, происхождение которых связано с возникновением вблизи интенсивных гармоник паразитных колебаний, обусловленных эффектом Гиббса (периоды 6.8, 12.8, 27.9 с).

### 3.1. Метод Брукса-Карузера

Брукс и Карузерс [7], исходя из обычной статистики для среднего  $st_{N-1; \alpha/2} / (N-1)$  ( $t$  – коэффициент Стьюдента,  $p = 1 - \alpha$ ) и некоторых других предположений, предложили для определения значимости амплитуд значения статистики  $A^p$ :

$$A^p = st_{N-1; \alpha/2} \sqrt{\frac{\ln(m/\alpha)}{N-1}} \quad (3.1)$$

или при  $\alpha = 0.05$ :

$$A^{0.95} = 2s \sqrt{\frac{\ln(20m)}{N-1}}. \quad (3.2)$$

Здесь для нашего ряда  $u_3$  series.dat:  $N = 300$ ,  $m = 1934$  (спектральный шаг 0.0001 при  $T_1 = 5$ ,  $T_2 = 150$  с),  $\alpha = 0.05$  для 95% доверительного интервала (уровень  $2\sigma$ ) и оценка дисперсии ряда  $y(:, 3)$ :  $s^2 = \text{var}(y(:, 3)) = 1.52$ . Рассчитанные нами значения  $A^p$  для различных  $m$  представлены в табл. 3.2. Согласно [7] и табл. 3.2, при указанных условиях значимыми на уровне 0.05 будут только моды с амплитудами, большими 0.46, т.е. с периодами 7, 12, 32 и 74 с.

Таблица 3.2

Параметры  $A^{0.95}$  для различных  $m$ 

$m$	5	9	20	100	300	1934
$A^{0.95}$	0.31	0.32	0.35	0.39	0.42	0.46



Данные из таблицы показывают, что уменьшение числа определяемых гармоник ведет к повышению значимости. Однако обратная сторона использования этого метода заключается в том, что если мы хотим показать значимость гармоник с периодом 129 с, то мы можем оперировать данными расчетов с шагом, соответствующим  $m \leq 20$ .

### 3.2. Оценки значимости на основе статистики $\chi^2$

Известно, что оценка дисперсии  $s^2$  временного ряда  $y(1..N)$ , представляющего собой выборку из случайного ряда с дисперсией  $\sigma^2$ , равна

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2. \quad (3.3)$$

Для оценки истинной дисперсии  $\sigma^2$  используется предположение о том, что распределение величины  $s^2(N-1)/\sigma^2$  подчиняется распределению  $\chi^2$  с  $N-1$  степенями свободы. Тогда доверительный интервал для дисперсии  $\sigma^2$ , соответствующий доверительной вероятности  $1-\alpha$  при выборочной дисперсии  $s^2$ , вычисленной из выборки  $y(1..N)$ , будет равен

$$\frac{(N-1)s^2}{\chi_{N-1; \alpha/2}^2} \leq \sigma^2 < \frac{(N-1)s^2}{\chi_{N-1; 1-\alpha/2}^2}. \quad (3.4)$$

Для каждой из спектральных мод (гармоник), находимых при фурье-преобразовании, число степеней свободы равно 2 (предполагается, что коэффициенты при действительной и мнимой частях преобразования (1.3) независимы и нормально распределены, см. например, [1]). Значения распределения  $\chi^2$  с 2 степенями свободы и с доверительной вероятностью  $1-\alpha = 0.95$  равны  $\chi_{2; 0.025}^2 = 0.0506$ ,  $\chi_{2; 0.975}^2 = 7.378$ . Для ряда  $u_3$  имеем  $s^2 = 1.52$ , и получим, что  $2 \cdot 1.52 / 7.378 < \sigma^2 < 2 \cdot 1.52 / 0.0506$  или  $0.41 < \sigma < 60$ . Таким образом, согласно критерию  $\chi^2$  значимыми на уровне 0.05 будут только моды с амплитудами, большими 0.41, т.е. с периодами 7, 12, 32 и 74 с. Итак, наиболее длиннопериодная гармоника с  $T = 132$  с и по критерию  $\chi^2$  не является на уровне 0.95 значимой.

На практике для улучшения качества оценок спектральных мод часто используют деление ряда на несколько частей и последующее усреднение сегментов ряда во временной области или усреднение

сегментов спектров. Очевидно, что при этом будет падать спектральное разрешение, однако усреднение  $M$  интервалов или  $M$  спектрограмм приводит к увеличению числа степеней свободы в  $M$  раз.

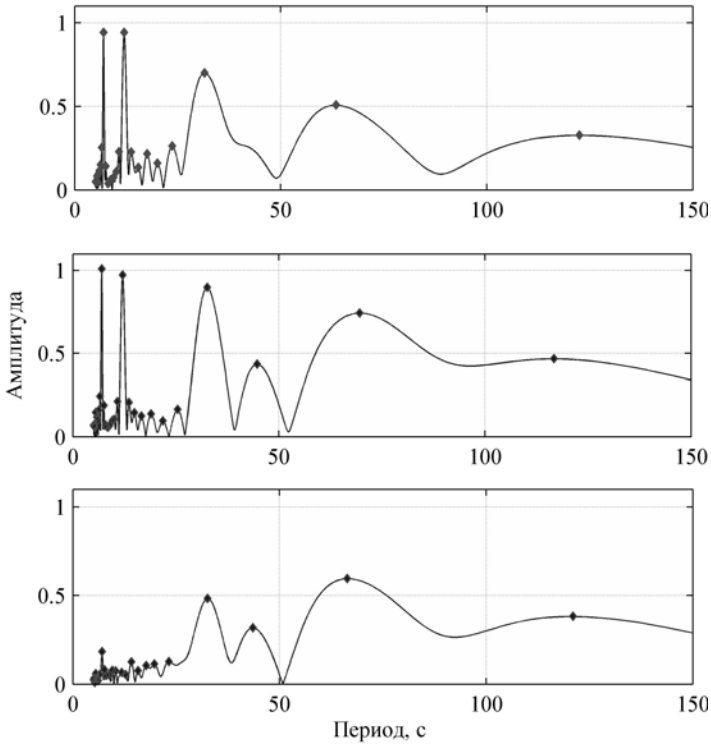


Рис. 3.1. Амплитудные спектры рядов  $y_{31}$ ,  $y_{32}$ ,  $y_{33}$  (сверху вниз)

Рассмотрим один из упрощенных вариантов этой методики. Ряд  $y_3$  разделим на две равные части:  $y_{31}(t) = 1 - 150$  с и  $y_{32}(t) = 151 - 300$  с. Дисперсии этих рядов равны 1.19 и 1.28 соответственно. Дисперсия усредненного ряда  $y_{33}$  равна 0.57. На рис. 3.1 показаны спектры этих трех рядов. Внизу показан спектр усредненного во временной области ряда. Значения распределения  $\chi^2$  с 4 степенями свободы и с доверительной вероятностью  $1 - \alpha = 0.95$  равны  $\chi^2_{4; 0.025} = 0.48$ ,  $\chi^2_{4; 0.975} = 11.14$ . Для ряда  $y_{33}$   $s^2 = 0.57$ , и получим, что  $2 \cdot 0.57 / 11.1 < \sigma^2 < 2 \cdot 0.57 / 0.48$  или  $0.32 < \sigma < 1.54$ , т.е. значимы с точки зрения

критерия  $\chi^2$ . моды с периодами 121, 66, 43 и 32 с. Таким образом, мы получили довольно искаженное представление о составе ряда.

Что же произошло с основными гармониками 7 и 12 с? Формальное разбиение ряда случайно привело к тому, что при сложении эти гармоники оказались почти в противофазе. Зато выросла амплитуда шумовой компоненты. Несколько лучшие результаты можно получить при усреднении в частотной области, т.е. спектров. Однако значимы окажутся не только моды 120, 67, 32, 12 и 7 с, но 44 с. Приведенный пример показывает, как осторожно следует подходить к рекомендуемой во многих пособиях процедуре повышения значимости спектральных оценок за счет механического разбиения рядов на отрезки.

### 3.3. Метод автокорреляции

Рассчитаем автокорреляционные функции  $\rho_\tau$  исходного ряда  $y_3$  для лагов  $\tau$  от 1 до 150 с:

$$\rho_\tau = \frac{\sum_{i=1}^{N-\tau} (y_i - \bar{y})(y_{i+\tau} - \bar{y})}{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}, \quad \tau = 1, 2, \dots, 150. \quad (3.5)$$

Доверительный интервал  $d$  на уровне  $1\sigma$  найдем по обычной формуле, используемой при больших  $N$ :

$$d(t) = (1 - \rho^2(t)) / \text{sqrt}(N - 1) \quad (3.6)$$

#### Пример 3.2. Файл P3\_2.m (рис. 3.2)

```
clear
load y3series.dat;
x(:, 1) = y3series(:, 1); y = y3series(:, 3);
N = length(x(:, 1)); J = 150;
for k = 0:J,
    s = 0;
    for t = 1:N-k,
        s = s + (y(t) - mean(y)).*(y(t+k) - mean(y));
    end
    c(k+1) = s./N;
end
```

```

sp = x(2, 1) - x(1, 1);
rk = [sp.*rot90(0:J, 3), rot90(c./c(1), 3)];
S = (1-rk(:, 2).^2)/sqrt(N-1);
hold on;
    for m = -2:0.1:2
        plot(rk(:, 1),m.*S + rk(:, 2),'Color',[0.8 0.8 0.8])
    end
hold off
grid on
ylabel('Коэф. корр. ');xlabel('Период, с');

```

На рис. 3.2 представлена автокорреляционная функция (закрашен интервал, в котором коэффициент корреляции изменяется в пределах  $2\sigma$ ). Из рисунка следует, что значимыми на этом уровне являются около 15 мод.

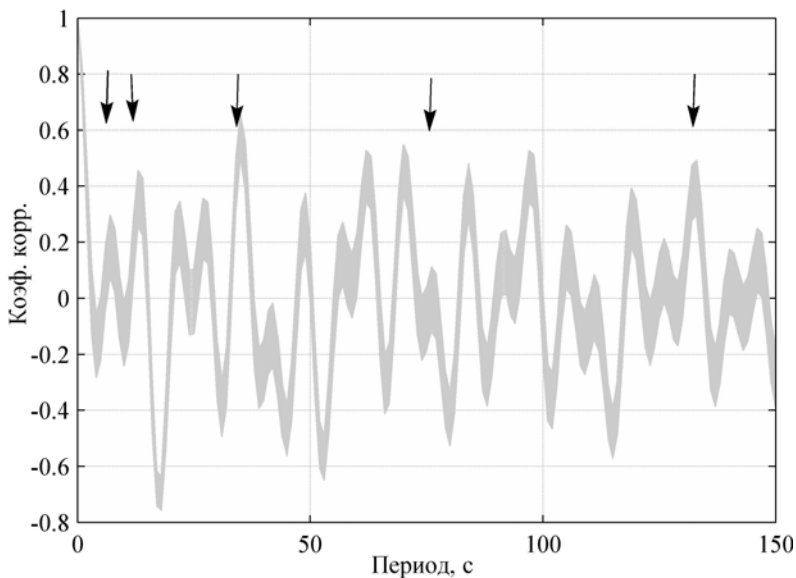


Рис. 3.2. Автокорреляционная функция ряда  $u_3$ . Стрелки указывают на положение заложенных в расчет ряда  $u_3$  спектральных гармоник

### 3.4. Метод наименьших квадратов

Зная приблизительно значения периодов основных колебаний, можно попытаться найти остальные параметры соответствующих гармоник (амплитуду и фазу), методом наименьших квадратов. Для этого составляется система линейных уравнений, почти аналогичная (1.3):

$$y(t) = C_0 + C_1 t + \sum_{k=1}^m [a_k \cos(2\pi t / T_k) + b_k \sin(2\pi t / T_k)]$$

где  $y(t)$  – среднемесячные значения ОСО,  $t$  – время (порядковый номер),  $C_0$  и  $C_1$  – параметры линейного тренда,  $T_k$  – периоды гармоник,  $m$  – число гармоник. Эта система решается одним из стандартных методов, находится ковариационная матрица, диагональные члены которой дадут значения параметров  $C_0$ ,  $C_1$ ,  $a_k$  и  $b_k$ . Исходя из дисперсии остатков и перекрестных членов ковариационной матрицы находятся среднеквадратичные погрешности этих параметров. Модельный ряд  $y^{TH}(t)$  более удобно рассчитывать по формуле

$$y^{TH}(t) = C_0 + C_1 t + \sum_{k=1}^m C_k \cos(2\pi t / T_k + \theta_k), \quad (3.7)$$

где величины  $C_k$  и  $\theta_k$  определяются по формулам

$$C_k = (a_k^2 + b_k^2)^{1/2}, \quad \theta_k = \arctg(-b_k / a_k). \quad (3.8)$$

Для расчетов нами были выбраны гармоники из последней строки табл. 3.1 ( $k = 1-8$ ). Найденные параметры и их погрешности (на уровне  $1\sigma$ ) приведены в табл. 3.3.

Пример программы дан ниже. В расчетах использована заимствованная из [8] функция HarmFit.m

#### Пример 3.3 Файл P3\_3.m (рис. 3.3.)

```
clear
load y3series.dat;
yy = y3series; N = length(yy(:, 1));
X = (1:N)'; Y = yy(:, 3);
DelY = std(Y);
Har = [1/6.8 1; 1/7 1; 1/12 1; 1/12.8 1; 1/27.9 1; 1/32 1; ...
1/56 1; 1/74 1; 1/129 1;];
Deg = 1; PlotPar = ""; File = 'P3_2parametr.txt';
```

```

%функция HarmFit [8]
[Par,Par_Err,AMPL,Chi2,PHsa,Par1,Resid]=SP_HarmFit(X,Y,DelY,...
Har,PlotPar,Deg,File);
%Form matrix of f,T,A,phi for all freq's & their obertones.
N = 1;
for nn = 1:length(Har(:, 1))
    PC(n, 1) = Har(nn, 1); PC(n, 2) = 1/Har(nn, 1);
    if(Har(nn, 2) > 1)
        n = n + 1;
        PC(n, 1) = Har(nn, 1)*2; PC(n, 2) = 1/PC(n, 1);
    end
    if(Har(nn, 2) > 2)
        n = n + 1;
        PC(n, 1) = Har(nn, 1)*3; PC(n, 2) = 1/PC(n, 1);
    end
    n = n + 1;
end
PC(:, 3) = AMPL'; PC(:, 4) = PHsa';
Yth = zeros(N, 1);
for n = 1:length(PC(:, 1))
    Yth = Yth + PC(n, 3).*sin(2/PC(n, 2)*pi.*X + PC(n, 4));
end
%add trend
%Yth = Yth + p(2) + p(1).*X;

plot(X, Y, X, Yth, '--r');
grid on
%*****
%*****
%Файл***** HarmFit.m*****
function Par,Par_Err,AMPL,Chi2,PHsa,Par1,Resid]=... Harm-
Fit(X,Y,DelY,Har,PlotPar,p,File);
%-----
% LSQ harmonies fitting.
% fit harmonies of the form:
%  $Y = a_1 \sin(w_1 * t) + b_1 \cos(w_1 * t) +$ 
%  $a_2 \sin(2 * w_1 * t) + b_2 \cos(2 * w_1 * t) + \dots$ 

```

```

% a_n*sin(n_1*w1*t) + b_n*cos(n_1*w1*t) + ...
% c_1*sin(w2*t) + d_1*cos(w2*t) + ...
% s_0 + s_1*t + ... + s_n.*t.^n_s
% (note that w is angular frequency, w=2*pi*f,
% the program is working with frequency "f").
% to set of N data points. return the parameters,
% the errors on the parameters,
% the Chi squares, and the covariance matrix.
% input: - Column vector of the independent variable.
%        - Column Vector of the dependent variable.
%        - Vector of the std error in the dependent variable.
%          If only one value is given, the points
%          are taken to be with equal weight. and Std error
%          equal to the value given.
%        - matrix of harmonics to fit.
%          N*2 matrix, where N is the number of different frequencies.
%          Each row should contain two numbers, the first is the
%          frequency to fit and the second is the number of harmonics
%          of that frequency to fit. If there is more then one row
%          then all the frequencies and their harmonics will be fitted
%          simultanously.
%        - Degree of polynomials to fit. (Default is 0).
%        - Vector of plot's control characters.
%          If argument is given then X vs. Y graph is plotted.
%          If equal to empty string (e.g. "") then plot X vs. Y
%          with red fitted function line and yellow circes for
%          the observations.
%          If one or two character are given then the first character
%          is for the observations sign and the second for the fitted
%          function line.
%          If third character is given then histogram of residual
%          is plotted. when the third character should contain the
%          number of bins.
%        - File name in which summary table of the fit will be written.
%          The summary table includes all information regarding the
%          fit parameters and Chi2 test.

```

```

% output: - Fitted parameters [a_1,b_1,...,a_n,b_n,c_1,d_1,...,s_0,...]
%         The order of the parameters is like the order of the
%         frequencies matrix, and then the constant + linear terms.
%         - Fitted errors in the parameters [Da_1,Db_1,...]
%         - The covariance matrix.
%         - Chi2 of the fit.
%         - Degrees of freedom.
%         - sine/cosine parameters in form od Amp. and phase (in
fraction),
%         pairs of lines for [Amp, Amp_Err; Phase, Phase_Err]...
%         phase are given in the range [-0.5,0.5].
%         - The Y axis residuals vector. [calculated error for Chi^2=1,
%         can be calculated from mean(abs(Resid)) ].
%         By Eran O. Ofek May 1994
%         Last Update Mar 1999
%-----
Deg = 0;
    if (nargin < 5),
        Deg = 1;
    end
N_X = length(X); tn = 1:X;
N_Y = length(Y);
N_DY = length(DelY);
    if (N_X ~= N_Y),
        error('X and Y must have the same length');
    end
    if (N_X ~= N_DY),
        if (N_DY == 1),
            % take equal weights
            if (DelY <= 0),
                error('DelY must be positive');
            else
                DelY = DelY.*ones(N_X, 1);
            end
        else
            error('Y and DelY must have the same length');
        end
    end
end

```



```

% number of parameters
N_Pars = Deg + 1 + 2.*sum(Har(:, 2));
% degree of freedom
Freedom = N_X - N_Pars;
% the size of the harmonies matrix
[Srow_Har, Scol_Har] = size(Har);
if (Scol_Har ~= 2),
    error('Number of columns in the harmonic freq. should be two');
end
% building the H matrix
H = zeros(N_X, N_Pars);
Counter = 0;
for I = 1:1:Srow_Har,
    % run over number of harmonic per frequency
    for J = 1:1:Har(I, 2),
        Counter = Counter + 1;
        H(:, Counter) = sin(2.*pi.*Har(I, 1).*J.*X);
        Counter = Counter + 1;
        H(:, Counter) = cos(2.*pi.*Har(I, 1).*J.*X);
    end
end
% add the constant term
Counter = Counter + 1;
H(:, Counter) = ones(N_X, 1);
% add the linear terms
for I = 1:1:Deg,
    Counter = Counter + 1;
    H(:, Counter) = X.^I;
end
% building the Covariance matrix
V = diag(DelY.^2);
% Old – Memory consuming
Cov = inv(H'*inv(V)*H);
Par = Cov*H'*inv(V)*Y;
Par_Err = sqrt(diag(Cov));

```

```

%'Number of degree of freedom ': Freedom
Resid = Y - H*Par;
Chi2 = sum((Resid./DelY).^2);

%Chi2/Freedom
%sqrt(2/Freedom)

if (nargin>5),
    % ----- New
    NewX = [min(X):((max(X)-min(X))./500):max(X)];
    % building the newH matrix
    NewH = zeros(length(NewX), N_Pars);
    Counter = 0;
    for I = 1:1:Srow_Har,
        % run over number of harmonic per frequency
        for J = 1:1:Har(I, 2),
            Counter = Counter + 1;
            NewH(:,Counter) = sin(2.*pi.*Har(I,1).*J.*NewX);
            Counter = Counter + 1;
            NewH(:,Counter) = cos(2.*pi.*Har(I,1).*J.*NewX);
        end
    end
    % add the constant term
    Counter = Counter + 1;
    NewH(:,Counter) = ones(length(NewX),1);
    % add the linear terms
    for I=1:1:Deg,
        Counter = Counter + 1;
        NewH(:,Counter) = NewX.^I;
    end
end

% write summary file
if (nargin == 7),
    Fid = fopen(File, 'w');
    fprintf(Fid, '%s \n', 'fitharmo.m - summary file');
end

```

```

fprintf(Fid, '%s \n', ['Created by Eran O. Ofek at ',date]);
fprintf(Fid, '\n');
fprintf(Fid, '%s \n', 'F# H# Frequency 1/Frequency A...
dA B dB C dC Fi dFi');

F_Coun = 0; aa = 1;
for I = 1:1:Srow_Har,
    % run over number of harmonic per frequency
    for J = 1:1:Har(I, 2),
        F_Coun = F_Coun + 1;
        C = sqrt(Par(F_Coun).^2 + Par(F_Coun+1).^2);
        AMPL(aa) = C;
        Fi = atan2(Par(F_Coun + 1), Par(F_Coun));
        PHsa(aa) = Fi;
        Aa = aa + 1;
        C_Err = sqrt((Par(F_Coun).*Par_Err(F_Coun) +
Par(F_Coun + 1).*...
        Par_Err(F_Coun + 1))./C);
        Fi_Err = sqrt((Par_Err(F_Coun + 1) +
Par(F_Coun+1).*Par_Err(F_Coun)./Par(F_Coun))./(Par...
        (F_Coun).^2 + Par(F_Coun + 1).^2)./Par(F_Coun)));
        F_Line =
[I,J,Har(I,1).*J,1./(Har(I,1).*J),Par(F_Coun),Par_Err(F_Coun),...
        Par(F_Coun + 1),Par_Err(F_Coun + 1), C, C_Err, Fi, Fi_Err];
        fprintf(Fid,'%d %d %12.6f %12.6f %10.5f %8.5f %10.5f
%8.5f ...
        %10.5f %8.5f %10.5f %8.5f\n', F_Line');
        F_Coun = F_Coun + 1;
    end
end

fprintf(Fid, '\n');
fprintf(Fid, '%s \n', 'Linear Terms');
fprintf(Fid, '%s \n', '#D Coef Err');
for I = 0:1:Deg,
    F_Coun = F_Coun + 1;
    F_Line = [I, Par(F_Coun), Par_Err(F_Coun)];

```

```

    fprintf(Fid,'%d %10.5f %8.5f\n',F_Line);
end
fprintf(Fid, '\n');
fprintf(Fid, '\n');
fprintf(Fid, '%s\n', ' Fit quality:');
fprintf(Fid,'%s ', ['No. Deg. of Freedom : ']);
fprintf(Fid, ' %d\n', Freedom);
fprintf(Fid, '%s', [' Chi2 : ']);
fprintf(Fid, ' %10.4f\n', Chi2);
fprintf(Fid, '%s', [' Reduced Chi2 : ']);
fprintf(Fid, ' %10.4f\n', Chi2/Freedom);
fprintf(Fid, '%s', [' Cumulative Chi2 : ']);
fprintf(Fid,' %6.4f\n', chi2cdf(Chi2, Freedom));

fclose(Fid);
end
% calculating amplitude and phase
Nab = 2.*sum(Har(:, 2));
for I=1:2:Nab-1,
    A = Par(I);
    B = Par(I + 1);
    DA = Par_Err(I);
    DB = Par_Err(I + 1);
    % calculate amplitude
    C = sqrt(A.^2 + B.^2);
    DC = sqrt(((A.*DA).^2 + (B.*DB).^2)/(A.^2 + B.^2));
    % calculate phase
    Ph = atan2(B, A);
    DPh = sqrt((A.*DB).^2 + (B.*DA).^2)/(A.^2 + B.^2);
    % convert phase from radian to fraction
    Ph = Ph./(2.*pi);
    DPh = DPh./(2.*pi);
    Par1(I, 1) = C;
    Par1(I, 2) = DC;
    Par1(I + 1, 1) = Ph;
    Par1(I + 1, 2) = DPh;
end

```

Таблица 3.3

Параметры гармоник для ряда  $y_3$ 

$k$	$T_k$	$C_k$	$\theta_k$	$\alpha_{MC}$
1	6.8	0.01	-2.8	
2	7	0.99	1.57	<b>100</b>
3	<b>12</b>	0.97	1.61	<b>100</b>
4	12.8	0.04	-2.5	
5	27.9	0.01	0.35	
5	<b>32</b>	0.79	1.53	<b>99</b>
6	56	0.05	0.93	
7	74	0.51	1.01	85
8	129	0.31	1.18	43

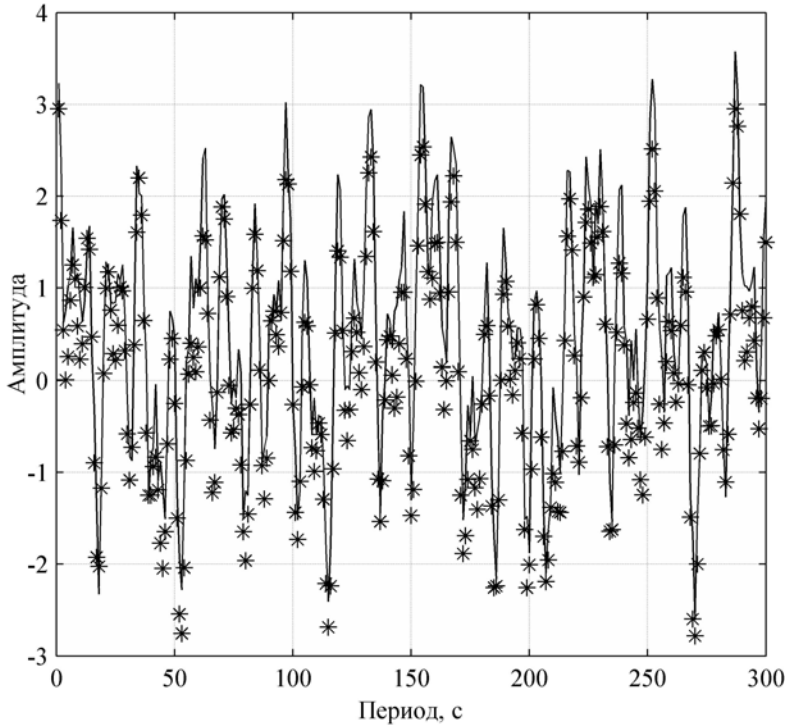


Рис. 3.3. Сопоставление исходного ряда  $y_3$  (сплошная линия) с расчетом по (3.7) с параметрами из табл. 3.3 (звездочки)

Жирным шрифтом в таблице отмечены периоды, для которых амплитуда значима на уровне  $2\sigma$  (колебание с периодом 74 с значимо на уровне  $1\sigma$ ). Расчет с параметрами из таблицы показан на рис. 3.3.

### 3.5. Метод Монте-Карло

Это последний метод, который мы рассмотрим. В общем случае он основан на сопоставлении достаточно большого числа случайных рядов, сгенерированных при определенных допущениях (или суррогатных рядов), и анализируемого ряда. Поскольку нас интересует спектральный состав, то мы будем сравнивать спектры ряда  $u_3$  и суррогатных рядов. На первом этапе сгенерируем 1000 случайных рядов такой же длины и с такой же дисперсией. Можно подсчитать в этих рядах число случаев, когда гармоники с периодами, приведенными в табл. 3.1, будут иметь в случайных рядах амплитуду такую же или превосходящую амплитуды из табл. 3.1. Если окажется, например, что таких рядов 50, то вероятность, что найденные гармоники являются результатом нормально распределенного шумового процесса, будет равна  $(50 / 1000 \cdot 100\%) = 5\%$ , а доверительный интервал для этих гармоник составит 95%.

Известно, что геофизические и многие другие ряды имеют «память», что проявляется в автокоррелированности соседних значений в рядах и в увеличении спектральной мощности низкочастотных составляющих («красный шум» или процессы авторегрессии первого порядка [9–12]). В этом случае оценки значимости должны учитывать уменьшение степеней свободы в автокоррелированных рядах. Наиболее общий метод анализа коррелированных последовательностей состоит в моделировании их авторегрессионным процессом первого порядка (AR1):

$$Y_i - \mu = \rho_1 (Y_{i-1} - \mu) + e_i, \quad (3.9)$$

где  $\mu$  – среднее значение процесса,  $\rho_1$  – коэффициент авторегрессии первого порядка,  $e_i$  – в зависимости от целей анализа или ряд остатков или нормально распределенный белый шум. Аппроксимация исследуемого ряда моделью (3.9) дает значение  $\rho_1$  и величину дисперсии остатков  $\sigma(e_i)$ .

На втором этапе для исходного ряда  $u_3$  по модели авторегрессии первого порядка (3.9) найдем дисперсию и коэффициент  $\rho_1$  и из

рядов нормально распределенного белого шума сформируем ряды «красного» шума. Мы проведем 10 серий расчетов (программа P3\_4.m), в каждом из которых будут сгенерированы 1000 случайных рядов длиной  $N = 300$ .

**Пример 3.4.** Файл P3\_4.m (рис. 3.4)

```

clear
load y3series.dat
yy = y3series;
N = length(yy(:, 1)); n = 1:N; n = n'; Y = yy(:, 3);
c0 = Y'*Y/N;
c1 = Y(1:N-1)'*Y(2:N)/(N-1);
g1 = c1/c0; s1 = sqrt((1-g1^2)*c0);
% Output: g1 – estimate of the lag-one autocorrelation.
%          s1 – estimate of the noise variance.
%p = polyfit(n, Y, 1) ;
%*****Periods*&*Amplitudes*to check*****
T = [7 12 32 74 129];
A = [0.99 0.97 0.79 0.51 0.31 ];
%*****
T = T'; A = A'; NNN = 10; PCarlo = zeros(length(T), NNN);
for NUM = 1:NNN
    TR = zeros(length(T), 1);
    Nn = 1;
    MCG = 1000; %number of Monte-Carlo guesses
    for k = 1:MCG
        randn('seed', sum(100*clock));
        c = 1; XX = zeros(N, c);
        XX(1) = sqrt(s1^2/(1-g1^2))*randn(1, c);
        Z = s1*randn(N, c);
        for ii = 2:N
            XX(ii) = g1*XX(ii-1) + z(ii); %random AR1 series
        end
        %^^^^^^^^^^^^^^^^Fourier^^^^^^^^
        F = 1./T; h_f = length(F); df = 1;
        tem0 = XX;
        Pxx = zeros(h_f/df, 2);
    end
end

```

```

for f_ind = 1:h_f,
    temp = abs(sum(tem0.*exp(-i*2*pi*F(f_ind)*n)));
    Pxw(f_ind, 2) = temp*temp;
end
P(:, 1) = T; P(:, 2)=2*sqrt(Pxw(:, 2))/N ;
%plot(P(:, 1), P(:, 2), 'o')
%^^^^^^^^^end of Fourier^^^^^^^^^^^^^^^^^^
for k = 1:h_f
    if (P(k, 2) >= A(k))
        TR(k) = TR(k) + 1;
    end
end
end
PCarlo(:, NUM) = 100-100*TR/MCG;% MonteCarlo estimate %
end
plot(P(:, 1), PCarlo(:, :), 'og')
hold on
for K = 1:h_f
    MCarlo(K, 1) = mean(PCarlo(K, 1:NNN));
end
plot(P(:, 1), MCarlo(:, 1), '*r'); grid on; hold off

```

Результаты расчетов, приведенные на рис. 3.4 и в последней колонке табл. 3.3, показывают, что оценки по методу Монте-Карло близки к оценкам, полученным методом наименьших квадратов. Значимость гармоника с периодом 129 с также не подтвердилась. На границе значимости оказалась гармоника с периодом 72 с.

Таким образом, основные методы, наиболее часто используемые для определения значимости спектральных гармоник, дали различные результаты. Анализ публикаций, связанных с оценками значимости результатов спектрального анализа, показывает зачастую зависимость полученных оценок от выбора авторами соответствующего метода. На наш взгляд, наиболее оптимальным является метод Монте-Карло, позволяющий оценить также тип шумового процесса. Метод наименьших квадратов дает возможность получить параметры гармоник (амплитуду и фазу) и решить обратную задачу – построить теоретический временной ряд. В рассмотренном выше алгоритме периоды гармоник были зафиксированы. Од-



нако несложно модифицировать метод наименьших квадратов для того, чтобы методом перебора или методом минимизации остатков находить также и значения периодов гармоник.

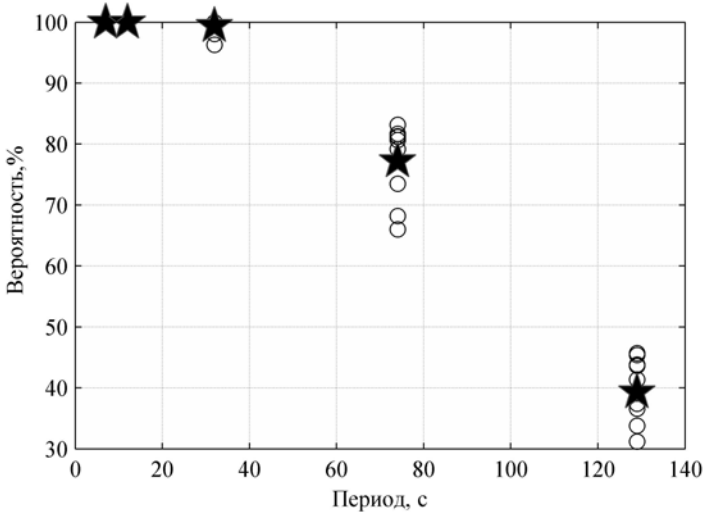


Рис. 3.4. Результаты тестирования значимости спектральных гармоник методом Монте-Карло: кружки – данные 10 серий (каждая по 1000 рядов); звездочки – среднее

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены основные методы практического вычисления в среде Матлаб амплитудных спектров с помощью трех модификаций фурье-преобразования, вейвлетного преобразования и метода максимальной энтропии Берга. Кратко описаны преимущества и недостатки этих методов. Эти методы были приложены к анализу временного ряда, содержащего три стабильные гармоники, две частотно-модулированные гармоники и нормально распределенный белый шум. Метод МПФ позволил выявить в этом ряде стабильные гармоники, а вейвлет-преобразование и скользящие методы Берга и МПФ – оценить параметры нестационарной гармоники. Дальнейший анализ этого временного ряда (декомпозиция на составляющие, анализ остатков и последующая реконструкция) выходит за рамки настоящего пособия и должен дать ответ на вопрос, какова природа оставшихся гармоник и каков тип шума (ряд содержит

нормально-распределенный шум, амплитуда которого равна половине амплитуды основных гармоник).

В целом алгоритм проведения спектрального анализа должен включать в себя все рассмотренные методы: Фурье-преобразование дает информацию о спектральном составе, вейвлетный анализ – предварительную информацию о временном ходе спектральных компонент. При необходимости получить более точные данные о частотах гармоник и их изменчивости в течение анализируемого периода измерений, следует использовать скользящие преобразования – метод МПФ и метод Берга.

Оценка значимости выявленных гармоник в ходе спектрального анализа может быть осуществлена с помощью метода Монте-Карло. Метод наименьших квадратов, кроме того, дает возможность решить обратную задачу построения теоретического ряда. Примеры использования изложенных алгоритмов для анализа гео- и гелиофизических рядов содержатся в [13–18].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов: прогноз и управление. – М.: Мир, 1974, вып. 1,2.
2. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.:Мир. 1990. – 584 с.
3. Дремин И.М., Иванов О.В., Нечитайло В.А. Вейвлеты и их использование. //УФН. – 2001. – Т.171. – №5. – С.465-501.
4. Хэррис Ф.Дж. Использование окон при гармоническом анализе методом дискретного преобразования фурье. //ТИИЭР, – 1978. – Т.66. – №1. – С.60-96.
5. Scargle J.D. Studies in astronomical time series analysis. Statistical aspects of spectral analysis of unevenly spaced data. //The Astrophysical Journal. 1982. V.263. P.835–853.
6. Stockwell R.G., Mansinha L., Lowe R.P. Localization of the Complex Spectrum: The *S* Transform. //IEEE transactions on signal processing. 1996. V.44, No.4, P.998–1001.
7. Брукс К., Карузес Н. Применение статистических методов в метеорологии. – Л-д: Гидрометиздат. 1963. – 416 с.
8. Ofek E.O. (<http://wise-obs.tau.ac.il/~eran/MATLAB/>).

9. Ghil M., Allen R.M., Dettinger M.D., et al. Advanced spectral methods for climatic time series. //Review Geophys. 2002. 40(1), 3.1–3.41, doi:10.1029/2000RG000092.

10. Percival D.B., Rothrock D.A. «Eyeballing» trends in climate time series: a cautionary note. //J.Climate. 2006. V.18. N6. P. 886–891.

11. Gilman D.L., Fuglister F.J., Mitchell J.M.Jr. On the power spectrum of «Red Noise». //J. Atm. Sci. 1963. V.20. P.182–184.

12. Mann M.E., Lees J.M. Robust estimation of background noise and signal detection in climatic time series. //Climatic Change. 1996. V.33. P.409–445.

13. Вишератин К.Н. О дискретном характере вариаций спектрального состава Цюрихского ряда чисел Вольфа. /Труды ГАИШ: Международный симпозиум «Астрономия 2005 – современное состояние и перспективы», июнь 2005, Москва, том LXXVIII. – С.29.

14. Вишератин К.Н., Каменоградский Н. Е., Кашин Ф.В. и др. Спектрально-временная структура вариаций общего содержания озона в атмосфере центральной части Евразии. //Изв. РАН Физика атмосф. и океана – 2006. – Т.42. – №2. – С.205-223.

15. Вишератин К.Н., Троянов М.М. Глобальное распределение основных спектральных гармоник ОСО по данным спутниковых измерений (ТОМС). //Сб. научн. статей. «Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса» – М.: –ООО «Азбука», ИКИ РАН. – 2006. – Вып.3. – Т.1. – С.257–262.

16. Вишератин К.Н. Межгодовые вариации и тренды среднезональных рядов общего содержания озона, температуры и зонального ветра. // Изв. РАН Физика атмосф. и океана – 2007. – Т.43. – №4. – С.67–85.

17. Вишератин К.Н., Бугрим Г.И. Спектральная структура индекса Бевериджа и индексов солнечной активности в 1500–1869 гг. // «Физика атмосферы: наука и образование». Юбилейный сб. – Физ. фак-т СПбГУ, Санкт Петербург, 2007. – С.142–152.

18. Вишератин К.Н. Основные характеристики глобального поля ОСО на основе сопоставления 7 и 8 версий данных ТОМС. //Сб. научн. статей «Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса» – М.: «Азбука-2000», ИКИ РАН. – 2007. – Вып.4. – Т.2. – С.56-60.

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	3
1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ .....	4
1.1. фурье-преобразование .....	5
1.2. Вейвлетное преобразование .....	8
1.3. Метод максимальной энтропии Берга .....	11
2. АЛГОРИТМЫ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА .....	12
2.1. Алгоритмы фурье-преобразований .....	12
2.2. Алгоритм метода максимальной энтропии Берга .....	20
2.3. Сопоставление методов Берга и фурье .....	23
2.4. Алгоритм вейвлет-преобразования .....	27
2.5. «Скользящие» преобразования .....	31
3. РАСЧЕТ ЗНАЧИМОСТИ ОЦЕНОК .....	39
3.1. Метод Брукса-Карузерса .....	40
3.2. Оценки значимости на основе статистики $\chi^2$ .....	41
3.3. Метод автокорреляции .....	43
3.4. Метод наименьших квадратов .....	45
3.5. Метод Монте-Карло .....	54
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	57
Литература .....	58

Редактор З.И. Сныкова

Компьютерная верстка Е.Л. Борисенко

---

ЛР № 020713 от 27.04.1998

---

Подписано к печати

Формат бумаги 60×84/16

---

Печать ризограф.

Бумага МВ

Печ. л. 3,75

Заказ №

Тираж 50 экз.

Цена договорная

---

Отдел множительной техники ИАТЭ

249035, г. Обнинск, Студгородок, 1